

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

ВЫПУСК

13

Под редакцией
академика Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1984

УДК 533.9.01

Вопросы теории плазмы: Сб. статей. Вып. 13/Под общей ред. акад. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.

Включены обзоры, процессы переноса в открытых ловушках, удержание заряженных частиц в магнитных полях, нагрев плазмы электронными циклотронными волнами и уширение спектральных линий в плазме.

Для научных работников, занимающихся физикой плазмы и проблемами термоядерной энергетики.

Ил. 54. Библиогр. 279.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Параил, О. П. Погуце,
Д. Д. Рютов

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ*Б. В. Чириков***§ 1. Введение. Задача Будкера [1]**

Исследование динамики отдельных (невзаимодействующих) заряженных частиц в магнитной ловушке является, вероятно, простейшей из задач по длительному удержанию плазмы для осуществления управляемого термоядерного синтеза. Тем не менее и эта «простая» задача оказывается вполне содержательной и все еще далекой от полного решения, несмотря на многолетние усилия в этом направлении (см., например, [2—4]). Кроме того, динамика отдельной частицы является неотъемлемой составной частью и любой более сложной задачи о коллективных процессах в плазме. Наконец, к задаче об удержании отдельной частицы в магнитной ловушке приходится возвращаться каждый раз, когда появляется новая схема или существенная модификация старого способа магнитного удержания плазмы*. Примером может служить амбиполярная ловушка Димова [7]. Она относится к классу так называемых открытых систем магнитного удержания плазмы, или ловушек с «магнитными пробками», о которых и пойдет речь ниже. Для краткости мы будем называть их просто ловушками.

Динамику частицы в ловушке можно рассматривать как задачу о нелинейных колебаниях системы, вообще говоря, с тремя степенями свободы, возможно, под действием некоторого внешнего возмущения. Термин «колебания» понимается здесь в широком смысле как синоним финитного движения частицы в ограниченной области пространства (удержание частицы). Иначе говоря, мы предполагаем, что конструкция ловушки (конфигурация магнитного поля) обеспечивает «запирание» частицы по крайней мере на время нескольких пролетов частицы через ловушку. В таких условиях основным фактором, определяющим характер длительной эволюции колебаний, являются резонансы, или соизмеримости периодов колебаний по различным степеням свободы, а также с внешним возмущением. Механизм действия резонансов особенно нагляден (и хорошо известен) в простейшем случае линейных колебаний. Нелинейная динамика много сложнее, однако и в этом

* Некоторые простейшие эффекты взаимодействия частиц могут быть учтены и в рамках одночастичной задачи, например изменение конфигурации магнитного поля за счет диамагнетизма плазмы [5] или рассеяние частиц в плазме [6].

случае резонансные процессы являются выделенными по той же причине: малые резонансные возмущения повторяются во времени и могут накапливаться, приводя к большему эффекту за длительное время, чем нерезонансные возмущения. Это важное свойство можно положить в основу определения резонансных процессов в широком смысле.

Такой «резонансный» подход означает, образно говоря, что прежде чем решать ту или иную динамическую задачу, необходимо отыскать в ней резонансы, даже если на первый взгляд кажется очевидным, что их здесь нет. Прекрасным примером такой ситуации является действие на динамическую систему адиабатического (т. е. очень низкочастотного) возмущения, чему и посвящена в основном эта статья.

В соответствии с этим ниже мы уделим главное внимание возможно более полному анализу различных резонансов и их взаимодействия. Последнее означает эффект совместного действия нескольких резонансов, который не равен простой сумме эффектов от отдельных резонансов из-за нелинейности уравнений движения и соответственно несправедливости правила суперпозиции.

Оказывается, что при определенных условиях взаимодействие резонансов кардинально меняет характер движения, превращая его из хорошо известных регулярных, или квазипериодических, колебаний в относительно мало известное хаотическое (стохастическое) «блуждание» частицы в ее фазовом пространстве (см., например, [8, 9]). Последнее очень похоже (в некоторых случаях неотличимо) на случайные колебания, т. е. колебания под действием какого-то внешнего (по отношению к динамической системе) случайного возмущения, или «шума», хотя такого возмущения может и не быть. Этот необычный режим движения оказывается, как это ни странно, весьма распространенным как для нелинейных колебаний вообще, так и для частицы в магнитной ловушке в частности. С точки зрения длительного удержания частиц в ловушке возникновение хаотических колебаний является вредным, так как приводит, как правило, к потере частиц вследствие их диффузии в фазовом пространстве.

В настоящем обзоре мы ограничимся обсуждением простейшего случая нелинейных колебаний с двумя степенями свободы, когда еще возможен хаотический режим движения в консервативной системе. Для задачи о движении частицы в ловушке это предполагает какую-то симметрию магнитного поля, а значит, и дополнительный (кроме энергии) точный интеграл движения. В случае аксиальной симметрии, например, дополнительным интегралом является проекция канонического момента частицы на ось симметрии. Движение происходит при этом по пересечению в фазовом пространстве поверхности постоянной энергии с поверхностью постоянного значения дополнительного интеграла.

Фактически, ниже рассматривается некоторый весьма специальный случай, когда связь между двумя степенями свободы является адиабатической, т. е. отношение основных невозмущенных частот

очень велико (или мало). Эта специальная задача, возникшая из анализа работы ловушки с магнитными пробками (задача Будкера), связана тем не менее с одной из классических проблем механики — проблемой адиабатической инвариантности переменных действия. Стоит отметить, что именно исследования по удержанию частиц в ловушках позволили значительно продвинуть решение и этой общей проблемы. В частности, выяснилось, что при определенных условиях адиабатический инвариант становится точным интегралом движения [10].

Эти и другие результаты обсуждаются ниже на примере динамики частиц в нескольких достаточно простых и в то же время характерных модификациях магнитной ловушки. В некоторых случаях задачу удастся решить до конца, т. е. найти в явном виде условия удержания частицы, с одной стороны, и статистические характеристики движения в неустойчивой области, с другой [2].

Автор признателен Г. И. Димову, Д. Д. Рютову и Д. Л. Шепелянскому за интересные обсуждения затронутых в статье вопросов, а также Г. Б. Минченкову за помощь в численном моделировании.

§ 2. Выбор невозмущенной системы

Как правило, аналитическое исследование возможно лишь с помощью каких-то приближенных методов, или теории возмущения. Первый шаг состоит поэтому в разделении исследуемой системы на невозмущенную часть и возмущение. Это разделение неоднозначно и диктуется конкретной физической задачей.

В рассматриваемом случае мы могли бы, например, взять в качестве невозмущенной системы частицу в однородном магнитном поле, отнеся пространственную неоднородность поля целиком к возмущению. Хотя невозмущенное движение оказывается при этом чрезвычайно простым, такой выбор не является наилучшим. Дело в том, что такое невозмущенное движение инфинитно и, следовательно, качественно отличается от действительного (возмущенного) движения. Говорят, что невозмущенное движение в этом случае вырождено (одна из основных частот системы равна нулю), а сколь угодно малое возмущение (неоднородность поля соответствующей конфигурации) приводит к бифуркации.

Чтобы выбрать более удобную для исследования невозмущенную систему, вспомним, что удержание частицы в открытой ловушке происходит за счет приближенного сохранения магнитного момента частицы $\mu = m\sigma_{\perp}^2/2B$, который пропорционален адиабатическому инварианту (переменной действия J_{\perp} ларморовского вращения. Взяв в качестве основных единиц скорость света, заряд и массу частицы ($c=e=m=1$), найдем:

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint (\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = \sigma_{\perp}^2/2\omega = \mu. \quad (2.1)$$

Здесь индексом \perp отмечены величины, характеризующие движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$; $\omega = B$ — ларморовская частота.

та. Ниже нас будет интересовать нерелятивистский случай ($v \ll 1$), однако все соотношения сохраняют силу при произвольных скоростях, если произвести замену $m \rightarrow \gamma m$; $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Выражение (2.1) для действия J_{\perp} является точным только в однородном поле. Мы можем, однако, определить невозмущенную систему, потребовав, чтобы именно эта величина была точным интегралом:

$$\mu \equiv \text{const}. \quad (2.2)$$

Знак тождества указывает на то, что последнее условие есть произвольный выбор невозмущенной системы, а не свойство величины μ . Все изменения μ мы отнесем к возмущению, которое будем предполагать достаточно малым. Последнее условие выполняется, как известно, для достаточно сильного магнитного поля, или, что эквивалентно, для достаточно малого ларморовского радиуса частицы (см. ниже, § 4).

Для аксиально-симметричной магнитной ловушки в пренебрежении скоростью дрейфа частицы невозмущенный гамильтониан имеет вид:

$$H^0(p, s) = v^2/2 = p^2/2 + \mu\omega(s), \quad (2.3)$$

где s — координата вдоль магнитной линии, а $p = v_{\parallel} = \dot{s}$ — сопряженный импульс (и продольная скорость) частицы. Как видно, выбор невозмущенной системы с помощью условия (2.2) удобен еще и тем, что эффективная потенциальная энергия продольного движения оказывается при этом просто пропорциональной заданной напряженности магнитного поля. Зная гамильтониан (2.3), можно, в принципе, найти невозмущенное продольное движение частицы.

§ 3. Несколько примеров

1. **Вспомогательная система.** Для того чтобы наиболее просто выявить основные особенности динамики частицы в магнитной ловушке, рассмотрим наряду с различными вариантами ловушки также и вспомогательную модель с двумя степенями свободы, заданную гамильтонианом:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + (1 + x^2)y^2}{2}, \quad (3.1)$$

где $p_x = \dot{x}$; $p_y = \dot{y}$. Эквипотенциали этой системы $[(1 + x^2)y = \text{const}]$ не замкнуты, так что закон сохранения энергии сам по себе еще не гарантирует финитность движения. Тем не менее, как мы увидим ниже (см. § 10), колебания этой системы оказываются при определенных условиях строго ограниченными. Если частота колебаний по x (x -колебаний) много меньше частоты y -колебаний, то система (3.1) качественно моделирует движение частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Действительно, колебания по y с переменной частотой $\omega_y = 1 + x^2$ соответствуют ларморовскому вращению в неоднородном магнитном поле $B = 1 + s^2$. Переменная действия для этих колебаний

$$J_y = \omega_y a_y^2/2 = (1 + x^2) a_y^2/2 \equiv \text{const}, \quad (3.2)$$

где a_y — амплитуда колебаний по y . Последнее условие, как и (2.2), определяет невозмущенную систему, гамильтониан которой находим с помощью условия

$$\frac{p_y^2}{2} + \frac{\omega_y^2 y^2}{2} \equiv \omega_y J_y, \quad (3.3)$$

эквивалентного (3.2). Из (3.1) получаем

$$H^0 = p_x^2/2 + J_y(1 + x^2) = J_y + J_x \sqrt{2J_y}. \quad (3.4)$$

Невозмущенный гамильтониан зависит только от переменных действия, которые являются поэтому интегралами движения, и описывает независимые колебания по двум степеням свободы с частотами:

$$\omega_x = \partial H^0 / \partial J_x = \sqrt{2J_y}; \quad \langle \omega_y \rangle = \partial H^0 / \partial J_y = 1 + J_x / \sqrt{2J_y}. \quad (3.5)$$

Величина $\langle \omega_y \rangle$ имеет смысл средней по времени частоты y -колебаний, ее можно получить, конечно, и непосредственным усреднением величины $(1 + x^2)$.

Важной особенностью рассматриваемых невозмущенных колебаний является их неизохронность — частоты колебаний зависят от действий (или амплитуд), хотя по форме как x -колебания, так и y -колебания оказываются почти гармоническими (частота y -колебаний медленно изменяется со временем).

2. **Короткая магнитная ловушка.** Примем, что поле ловушки имеет не только ось симметрии ($r=0$ в цилиндрических координатах z, r, φ), но и плоскость симметрии ($z=0$). Пусть задано поле на оси ловушки:

$$B_z(z, 0) = B_{00}f(z); \quad f(0) = 1; \quad f(-z) = f(z); \quad B_r(z, 0) = 0, \quad (3.6)$$

где B_{00} — поле в центре ловушки ($z=r=0$). Конфигурация поля на оси $f(z)$ зависит, вообще говоря, как от внешних токов в обмотках ловушки, так и от токов в плазме. В достаточно малой приосевой области вектор-потенциал поля (3.6) можно записать в виде

$$A_\varphi(z, r) \approx B_{00} \left[\frac{rf(z)}{2} + r^3 g(z) \right]. \quad (3.7)$$

Член, пропорциональный r^2 , отсутствует из-за аксиальной симметрии поля. При заданной $f(z)$ функция $g(z)$ может быть любой в зависимости от токов в плазме. При отсутствии последних («вакуумное» поле) $g(z) = -f''/16$ из $\Delta \mathbf{A} = 0$, или $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. С принятой точностью поле в приосевой области

$$\left. \begin{aligned} B_z(z, r) &\approx B_{00} [f(z) + 4r^2 g(z)]; \\ B_r(z, r) &\approx -B_{00} \left[\frac{rf'}{2} + r^3 g' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Существенно, что при заданном поле на оси токи в плазме дают лишь малые поправки порядка r^2 . Пренебрегая ими, можно за-

писать зависимость напряженности поля вдоль магнитной линии в виде

$$B(s) \approx B_0 f(s); \quad B_0 \approx B_{00} [f(0) + 4r_0^2 g(0)] \approx B_{00}. \quad (3.9)$$

Индексом нуль здесь и далее обозначаются значения соответствующих величин в плоскости симметрии $z=0$.

Примером короткой ловушки является конфигурация поля, соответствующая

$$f(s) = 1 + (s/L)^2, \quad (3.10)$$

где L — продольный масштаб ловушки. Такая конфигурация является хорошим приближением для центральной части классической ловушки с магнитными пробками. Смысл термина «короткая ловушка» поясняется ниже (см. п. 3).

Используя результаты п. 1 этого параграфа, можно сразу написать для поля (3.10) невозмущенный гамильтониан

$$H^0 = p^2/2 + \mu\omega_0 \left(1 + \frac{s^2}{L^2}\right) = \mu\omega_0 + J\sqrt{2\mu\omega_0}/L \quad (3.11)$$

и частоты

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\mu) = \partial H^0/\partial J = \sqrt{2\mu\omega_0}/L; \quad \langle \omega(\mu, J) \rangle &= \omega_0 + \frac{J\sqrt{\omega_0}}{L\sqrt{2\mu}} = \\ &= \omega_0 \left(1 + \frac{a^2}{2L^2}\right) = \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \beta_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Здесь a — амплитуда продольных колебаний частицы; $J = \Omega a^2/2$ — продольное действие; β_0 — угол наклона вектора скорости частицы к магнитной линии (при $s=0$).

Рассматриваемый пример (3.10) можно было бы назвать также гармонической ловушкой (по форме продольных колебаний).

3. Длинная магнитная ловушка. Эта конфигурация отличается почти постоянным полем на большей части длины ловушки с относительно короткими и крутыми пробками. Такое поле характерно для амбиполярной ловушки Димова [7]. Будем описывать ее посредством [4]

$$f(s) = 1 + (s/L)^n, \quad (3.13)$$

где n — некоторое четное число. Величина L по-прежнему характеризует длину всей ловушки, тогда как размер пробки имеет порядок

$$l = L/n. \quad (3.14)$$

Короткая ловушка соответствует $n=2$ и $l \sim L$, а для длинной $n \gg 1$ и $l \ll L$, т. е. размер пробок много меньше размера всей ловушки. Это и отражают термины «короткая» и «длинная» ловушка.

При $n \gg 1$ эффективную потенциальную энергию продольного движения можно приближенно представить в виде прямоугольной

ямы длиной $2L$. Невозмущенный гамильтониан (2.3) принимает при этом вид:

$$H^0 = p^2/2 + \mu\omega_0 f(s) \approx J^2/2M + \mu\omega_0. \quad (3.15)$$

Напомним, что ω_0 не зависит от s на заданной магнитной линии. Величина $M = (2L/\pi)^2$, а продольное действие

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p ds \approx \frac{2L}{\pi} p. \quad (3.16)$$

Основные невозмущенные частоты:

$$\Omega = \frac{J}{M} = \frac{\pi}{2L} p; \quad \langle \omega \rangle \approx \omega_0. \quad (3.17)$$

4. Многопробочная ловушка [11]. Такая ловушка представляет собой цепочку обычных ловушек, или, иначе, длинную ловушку с гофрированным магнитным полем, напряженность которого изменяется вдоль ловушки периодически (в простейшем случае). Зададим конфигурацию поля в такой ловушке в виде

$$f(s) = \frac{1}{2} \left[(\lambda + 1) - (\lambda - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right) \right], \quad (3.18)$$

где $\lambda = f_{\text{макс}}/f_{\text{мин}}$ — пробочное отношение. Невозмущенный гамильтониан (2.3) принимает теперь вид:

$$H^0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu\omega_0}{2} \left[(\lambda + 1) - (\lambda - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right) \right]. \quad (3.19)$$

Уравнения движения такой системы, как известно, полностью интегрируются в эллиптических функциях (см., например, [8, 12—14]). Модуль эллиптических интегралов k выражается через параметры системы посредством

$$k^2 = \begin{cases} \frac{W}{\mu\omega_0(\lambda - 1)}; & H^0 < \lambda\mu\omega_0; \\ \frac{\mu\omega_0(\lambda - 1)}{W}; & H^0 > \lambda\mu\omega_0, \end{cases} \quad (3.20)$$

где $W = H^0 - \mu\omega_0$ — невозмущенная энергия, отсчитываемая от минимума потенциала ($\mu\omega_0$). Первый режим движения соответствует запертым частицам, совершающим ограниченные по s колебания, а второй — пролетным частицам. Граничная траектория, разделяющая оба режима ($H^0 = \lambda\mu\omega_0$), называется сепаратрисой. Схема фазовых траекторий системы (3.19) изображена на рис. 1.

Для запертых частиц частота продольных колебаний дается выражением

$$(H^0) = \frac{\pi\Omega_0}{2\mathcal{K}(k)}, \quad (3.21)$$

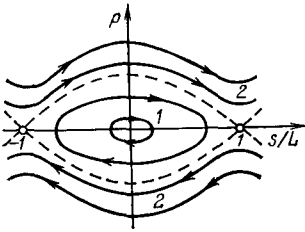


Рис. 1. Схема невозмущенных фазовых траекторий в многопролочной ловушке:

1 — запертые частицы; 2 — пролетные частицы; сепаратриса показана пунктиром

где \mathcal{K} — полный эллиптический интеграл первого рода, а

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\mu\omega_0(\lambda-1)}{2}} \quad (3.22)$$

частота малых колебаний. Для пролетных частиц основная частота продольного движения может быть представлена в виде, аналогичном (3.21):

$$\Omega_{\text{пр}} \equiv 2\pi/T_{\text{пр}} = \pi\Omega_r/2\mathcal{K}(k), \quad (3.23)$$

где $T_{\text{пр}}$ — время пролета периода поля (3.18), а

$$\Omega_r = \frac{\pi}{L} \sqrt{2W} \quad (3.24)$$

частота свободного движения (при $\lambda=1$). Заметим, что в рассматриваемом случае $k=2\Omega_0/\Omega_r$ (3.20).

В дальнейшем нас будет особенно интересовать движение вблизи сепаратрисы, расстояние до которой по энергии мы будем характеризовать безразмерной величиной

$$\omega = (H^0 - \lambda\mu\omega_0) \frac{2}{(\lambda-1)\mu\omega_0}. \quad (3.25)$$

Малая окрестность сепаратрисы соответствует $|\omega| \ll 1$, причем для запертых частиц $\omega < 0$, а для пролетных $\omega > 0$. В обоих режимах $k^2 \rightarrow 1 - |\omega|/2$; $\Omega_r \rightarrow 2\Omega_0$ и

$$\Omega(\omega) \approx \frac{\Omega_{\text{пр}}(\omega)}{2} \rightarrow \frac{\pi\Omega_0}{\ln\left(\frac{32}{|\omega|}\right)}. \quad (3.26)$$

Хотя частоты в обоих режимах и отличаются в 2 раза [период пролетной частицы составляет ровно половину периода запертой (см. рис. 1)], движения в обоих случаях близки друг к другу и к движению по сепаратрисе, которое выражается через элементарные функции:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_c = p_c(s) &= \pm \frac{2}{\pi} L\Omega_0 \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right); \\ \frac{s_c(t)}{L} &= \frac{4}{\pi} \arctg(e^{\Omega_0 t}) - 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Фазовая траектория на сепаратрисе (первое выражение) изображена на рис. 1. Во втором выражении начало отсчета времени ($t=0$) соответствует минимуму поля ($s=0$). Существенное отличие движения по сепаратрисе от соседних траекторий сводится только к частоте, которая точно на сепаратрисе равна нулю [ср. (3.21) и (3.23)].

Действие проще всего найти интегрированием выражения (3.21) для частоты. В случае запертых частиц

$$J(H^0, \mu) = \int_0^W \frac{dW}{\Omega(W, \mu)} = \frac{8}{\pi^3} L^2 \Omega_0 [E(k) - (1 - k^2) \mathcal{K}(k)], \quad (3.28)$$

где мы перешли к интегрированию по dk с помощью (3.20); $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Это выражение определяет неявно функцию $H^0(J, \mu)$. При $W \rightarrow 0$ (малые колебания) $J \rightarrow W/\Omega_0$ [ср. (3.11)]. Производная $\partial H^0(J, \mu)/\partial J = [\partial J(H^0, \mu)/\partial H^0]^{-1}$ дает, конечно, снова частоту (3.21). Для вычисления средней частоты ларморовского вращения $\langle \omega \rangle = \partial H^0(J, \mu)/\partial \mu$ запишем дифференциал

$$dJ(H^0, \mu) = \frac{\partial J}{\partial H^0} dH^0 + \frac{\partial J}{\partial \mu} d\mu = 0.$$

Откуда

$$\langle \omega \rangle = - \frac{\partial J/\partial \mu}{\partial J/\partial H^0} = \omega_0 \left[\lambda - (\lambda - 1) \frac{E(k)}{\mathcal{K}(k)} \right] \rightarrow \lambda \omega_0 \left[1 - \frac{2(\lambda - 1)/\lambda}{\ln(32/|\omega|)} \right]. \quad (3.29)$$

Последнее выражение дает асимптотику $\langle \omega \rangle$ вблизи сепаратрисы ($|\omega| \ll 1$). Для малых колебаний $\langle \omega \rangle \rightarrow \omega_0 + W/2\mu$ [ср. (3.12)]. При вычислении (3.29) следует учесть, что $\partial W(H^0, \mu)/\partial \mu = -\omega_0$.

Аналогичным образом для пролетных частиц получаем действие в виде

$$J_{\text{пр}}(H^0, \mu) = J_{\text{пр}}^c + \int_{W_c}^W \frac{dW}{\Omega_{\text{пр}}(W, \mu)} = \frac{4L^2\Omega_0}{\pi^3} \frac{E(k)}{k}. \quad (3.30)$$

Здесь $W_c = \mu\omega_0(\lambda - 1)$ и $J_{\text{пр}}^c = 4L^2\Omega_0/\pi^3$ — энергия и действие на сепаратрисе. Заметим, что последнее в 2 раза меньше, чем для запертых частиц (3.28), так что действие как функция энергии имеет на сепаратрисе разрыв по той же причине, что и частота [см. (3.26)]. Среднее значение ларморовской частоты равно:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 \left[1 + \frac{\lambda - 1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{\mathcal{K}(k)} \right) \right] \rightarrow \lambda \omega_0 \left[1 - \frac{2(1 - 1/\lambda)}{\ln(32/|\omega|)} \right]. \quad (3.31)$$

Обратим внимание, что асимптотика $\langle \omega \rangle$ при $\omega \rightarrow 0$ одинакова по обе стороны сепаратрисы [ср. (3.29)]. При $W \gg W_c$ величина $\langle \omega \rangle \approx \approx \omega_0(1 + \lambda)/2$, т. е. равна просто среднему по s .

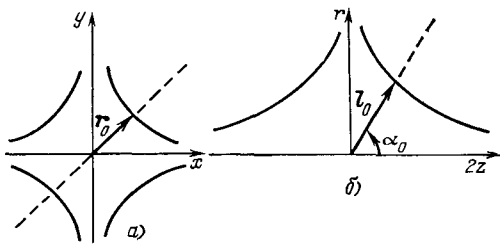


Рис. 2. Схема магнитных линий встречных пробков:

a — плоская геометрия (поле не зависит от z); *b* — цилиндрическая (аксиально-симметричная) геометрия, $r^2 = x^2 + y^2$, $\text{tg } \alpha_0 = \sqrt{2}$ ($\alpha_0 \approx 55^\circ$). Пунктиром показана линия максимумов поля. Векторы r_0 и l_0 задают магнитную линию

5. Встречные пробки, плоская геометрия. Схема магнитных линий такого поля изображена рис. 2, *a*. Вектор \mathbf{B} расположен в плоскости (x, y) ($B_z = 0$) и не зависит от z . Отметим, что вследствие этой симметрии здесь, как и в аксиально-симметричной ловушке, имеется дополнительный точный интеграл движения (z — компонента канонического импульса частицы), и задача сводится к двум степеням свободы. Конфигурация рассматриваемого поля одинакова во всех четырех квадрантах плоскости (x, y) , поэтому достаточно рассмотреть один из них, скажем, первый ($x, y > 0$). Кроме того, поле симметрично относительно биссектрис углов между координатными осями ($y = \pm x$). Магнитную линию будем задавать минимальным расстоянием до начала координат r_0 (рис. 2, *a*). Вектор — потенциал этого поля может быть выбран в виде (см, например, [15]):

$$A_z(x, y) = Cxy, \quad (3.32)$$

где C — некоторая постоянная, которая будет определена ниже. Тогда

$$B_x = Cx; \quad B_y = -Cy; \quad B = Cr; \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (3.3)$$

Обозначим B_0 минимальное вдоль магнитной линии поле в точке r_0 , тогда $C = B_0/r_0$, т. е. минимальное поле пропорционально r_0 . В рассматриваемом случае приосевое приближение, которым мы пользовались в предыдущих примерах магнитных ловушек, совершенно непригодно, так как поле на оси ловушки ($x, y = 0$) равно нулю. Для нахождения функции $B(s)$ вдоль магнитной линии определим сначала длину линии s , отсчитанную от точки r_0 . Уравнение линии: $A_z = \text{const}$, или $2xy = r_0^2$, или, наконец, $r_0^2 = r^2 \sin 2\varphi$ (в полярных координатах r, φ). Координата вдоль линии равна:

$$s(r) = \int_{r_0}^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - r_0^4}} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{r_0(r - r_0)}; & r - r_0 \ll r_0; \\ r + \frac{r_0}{6} \approx r; & r \gg r_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Этот интеграл выражается через эллиптические функции, но мы ограничимся двумя указанными крайними случаями. Первый из

них соответствует центральному участку магнитной линии вблизи минимума поля. С учетом (3.33) получаем в этой области

$$f(s) \approx 1 + \frac{s^2}{r_0^2}; \quad \omega(s) = \omega_0 f(s); \quad \omega_0 = B_0, \quad (3.35)$$

т. е. поле короткой ловушки (3.10) с характерной длиной $L=r_0$. Второе выражение в (3.34) описывает края магнитной линии. Здесь

$$f(s) \approx |s|/r_0. \quad (3.36)$$

Такая конфигурация является для нас новой, и мы рассмотрим ее подробнее. Невозмущенный гамильтониан имеет вид:

$$H^0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu\omega_0 |s|}{r_0} = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \mu J \right)^{2/3}, \quad (3.37)$$

где J — продольное действие. Невозмущенные частоты равны:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \right)^{2/3} \frac{\mu^{1/3}}{J^{1/3}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega_0}{2r_0 a}}; \\ \langle \omega \rangle &= \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \right)^{2/3} \frac{J^{2/3}}{\mu^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0 a}{r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где a — амплитуда продольных колебаний.

6. Встречные пробки, цилиндрическая геометрия. Рассмотрим теперь конфигурацию магнитного поля, создаваемую аксиально-симметричными встречными пробками, например двумя одинаковыми цилиндрическими катушками с противоположным направлением токов и магнитного поля (рис. 2, б). Вектор-потенциал такого поля можно выбрать в виде (см., например, [15]):

$$A_\phi = Czr,$$

откуда

$$B_z = C2z; \quad B_r = -Cr; \quad B = Cl, \quad (3.39)$$

где вектор l с компонентами $(2z, r)$ характеризует положение точки на плоскости $(2z, r)$ (см. рис. 2, б).

Основное отличие рассматриваемой ловушки от предыдущей связано с отсутствием симметрии магнитной линии относительно минимума поля на ней. Линия минимумов поля по-прежнему является прямой, однако она образует теперь с осью z угол $\alpha_0 \approx 55^\circ$ [$\text{tg } \alpha_0 = \sqrt{2}$, на плоскости $(2z, r)$]. Уравнение магнитной линии получается из $rA_\phi = \text{const}$, или

$$zr^2 = (l_0/\sqrt{3})^3, \quad (3.40)$$

где вектор l_0 характеризует положение минимума поля на данной линии. Соответственно постоянная $C = B_0/l_0$.

Координату s вдоль магнитной линии отсчитываем по-прежнему от точки I_0 :

$$s = \int_{z_0}^z dz \sqrt{1 + \frac{b^3}{4z^3}} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b^{3/2}}{\sqrt{z}}; & z \ll z_0; \\ \sqrt{3}(z - z_0); & z \approx z_0; \\ z; & z \gg z_0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Здесь $z_0 = b/2$; $b = l_0\sqrt{3}$. Комбинируя это с выражением $B = \omega = Cl$ (3.39), находим:

$$\dot{f}(s) \approx \begin{cases} |s|/l_0; & z \rightarrow 0; \\ 1 + 2s^2/l_0^2; & z \approx z_0; \\ 2|s|/l_0; & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.42)$$

Как и в предыдущем случае, вблизи минимума поля ($z \approx z_0$) работает приближение короткой ловушки с масштабом $L = l_0/\sqrt{2}$, а вдали эффективный потенциал является линейным по s . Существенно, однако, что в отличие от предыдущего примера наклон потенциальной кривой (т. е. эффективная продольная сила) теперь разный по обе стороны от минимума потенциала. Это является следствием указанной выше асимметрии цилиндрической геометрии ловушки. Наглядно причину асимметрии можно пояснить следующим образом: при $z \rightarrow \infty$ пучок магнитных линий сжимается по двум направлениям (x, y), тогда как при $r \rightarrow \infty$ сжатие происходит только по одному направлению (z).

Для вычисления частот $\langle \omega \rangle$, и Ω можно использовать выражения (3.38), взяв полусумму величин $\langle \omega \rangle$ и $1/\Omega$ для обоих наклонов потенциала при той же энергии H^0 .

§ 4. Адиабатическое возмущение

Нашей основной задачей является исследование эффекта возмущения, т. е. изменения магнитного момента частицы μ , который в невозмущенной системе был принят постоянным (2.2). В этом параграфе мы получим уравнение для $\dot{\mu}$.

Начнем с простой модельной системы (3.1). Выражение для \dot{J}_y найдем, дифференцируя (3.3) и используя точные уравнения движения из гамильтониана (3.1):

$$\dot{J}_y = \dot{x}x \left(y^2 - \frac{\dot{y}^2}{\omega_y^2} \right) = 2J_y \frac{\dot{x}x}{1+x^2} \cos(2\theta). \quad (4.1)$$

Здесь $\omega_y = 1+x^2$, и мы положили

$$y \equiv a_y \cos \theta; \quad \dot{y} \equiv \omega_y a_y \sin \theta, \quad (4.2)$$

определив тем самым новые переменные a_y, θ (амплитуда и фаза y -колебаний), в которых $J_y = \omega_y a_y^2/2$ [см. (3.2), (3.3)]. Выраже-

ние (4.1) и есть искомое уравнение для $J_y(t)$. Оно будет проинтегрировано в § 7. Полезно, однако, сразу же отметить некоторые его особенности. Правая часть уравнения представляет собой произведение функций, изменяющихся во времени с разными частотами: низкой [сомножитель $S(t) = \dot{x}x/(1+x^2)$ — с частотой продольных колебаний Ω] и высокой [сомножитель $F(t) = \cos(2\theta)$ — с удвоенной частотой ларморовского вращения $2\langle\omega\rangle$]. Поэтому в первом приближении J_y будет испытывать лишь ограниченные и малые (при малом отношении $\Omega/2\langle\omega\rangle$) колебания. Накапливающиеся изменения J_y , которые только и интересуют нас здесь, возможны лишь за счет резонанса между обоими движениями, т. е. за счет достаточно высоких гармоник низкой частоты Ω . Чем меньше отношение частот $\Omega/2\langle\omega\rangle$, тем более высокие гармоники требуются для резонанса и тем меньше их амплитуды, а следовательно, и некоторая средняя скорость изменения J_y . Поэтому в качестве естественного параметра малости возмущения в данной задаче можно взять прямо отношение частот:

$$\varepsilon = \Omega/\langle\omega\rangle. \quad (4.3)$$

Эту величину называют обычно параметром адиабатичности, поскольку ее малость и есть главное условие адиабатической инвариантности переменных действия, т. е. условие их приближенного сохранения во времени. Более подробно этот вопрос обсуждается ниже (см. § 10).

Переходя собственно к магнитным ловушкам, заметим прежде всего, что малый параметр адиабатичности (4.3) определяется второй производной магнитного поля по координатам, от которой зависит частота продольных колебаний Ω . Используемая иногда для оценок первая производная (градиент поля) сама по себе не имеет особого физического смысла в качестве параметра адиабатичности. Так, например, в случае сходящихся или расходящихся прямолинейных магнитных линий магнитный момент частицы сохраняется точно, хотя градиент поля и отличен от нуля. Существенным является изгибание магнитных линий, их кривизна. Оказывается, что в магнитной ловушке именно кривизна магнитной линии дает основной вклад в изменение μ , как это было впервые выяснено в работе [16].

Рассмотрим этот механизм подробнее. При изгибании (повороте) магнитной линии μ изменяется, если даже вектор скорости \mathbf{v} остается постоянным, так как μ зависит только от проекции v на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{B} , а эта плоскость поворачивается независимо от \mathbf{v} . Найдем производную \dot{v}_\perp^2 за счет этого эффекта. Будем считать магнитную линию плоской кривой (без кручения) и пусть $\mathbf{e}_B = \mathbf{B}/B$ — единичный касательный вектор, а \mathbf{e}_R — единичный вектор внешней (по отношению к центру ловушки) нормали к магнитной линии (рис. 3). Тогда из выражения $\dot{v}_\perp^2 = \dot{v}^2 - (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{e}}_B)^2$ имеем:

$$\dot{v}_\perp^2 \rightarrow -2v_\parallel (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{e}}_B) = -2v_\parallel v_n/R,$$

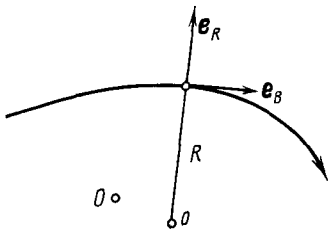


Рис. 3. Геометрия плоской магнитной линии: \mathbf{e}_B , \mathbf{e}_R — касательный и нормальный единичные векторы; O — центр ловушки; O_0 — центр кривизны, соответствующий данной точке магнитной линии; R — радиус кривизны в этой точке, отрицательный в данном случае (см. текст)

где мы приняли $\mathbf{v} = \text{const}$; $v_{\parallel} = v$, \mathbf{e}_B ; $v_{\perp} = v$, $\mathbf{e}_R = \mathbf{v}_{\perp}$, \mathbf{e}_R и R — радиус кривизны магнитной линии, который считается положительным, если линия выпуклая к центру ловушки. Мгновенная угловая скорость поворота \mathbf{e}_B при движении частицы вдоль магнитной линии равна

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{e}_B \times \mathbf{e}_R \frac{v_{\parallel}}{R}.$$

При достаточно малом ларморовском радиусе проекция скорости частицы $v_{\perp} \approx -v_{\perp} \sin \theta$, где θ — ларморовская фаза, отсчитываемая от направления вектора \mathbf{e}_R (более аккуратное выражение для v_{\perp} приведено в [8]). Окончательно получаем:

$$\dot{\mu} \rightarrow \sqrt{2\mu} \frac{v_{\parallel}^2}{R \sqrt{\omega}} \sin \theta. \quad (4.4)$$

Здесь стрелка указывает, что выписан лишь основной член уравнения для $\dot{\mu}$, определяющий накапливающиеся резонансные изменения μ . Полное уравнение для $\dot{\mu}$ приведено в работе [5]. В него входят, в частности, и члены вида (4.1), пропорциональные $\cos(2\theta)$. Однако, как будет показано ниже (см. § 7), они дают лишь экспоненциально малые добавки из-за вдвое меньшего значения параметра адиабатичности (4.3). Подробное обсуждение выделения главного члена возмущения (4.4) содержится в [5]. Мы вернемся к этому вопросу в § 7.

§ 5. Несущественный эффект возмущения

Нашей основной задачей является интегрирование возмущенного уравнения вида (4.4) или (4.1), т. е. определение эффекта возмущения — изменения невозмущенного интеграла движения μ (или J_y). Широко распространенным способом интегрирования подобных уравнений является та или иная форма асимптотических методов [12], т. е. построение решения уравнения в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра задачи, в нашем случае параметра адиабатичности (4.3). Термин «асимптотический» означает, что остаточный член такого ряда не уменьшается, вообще говоря, с ростом числа его членов, а убывает лишь вместе с параметром малости. Такой подход использовался в ряде работ и для исследования динамики частицы в магнитной ло-

вухке (см., например, [17, 18]. В применении к уравнениям вида (4.4) или (4.1) он означает, грубо говоря, интегрирование по частям. На каждом шаге интегрируется высокочастотный множитель правой части $F(t)$ и дифференцируется низкочастотный $S(t)$. В результате каждый шаг увеличивает степень малого параметра (4.3) на единицу. Для уравнения (4.1), например, первый шаг дает:

$$\delta J_y = J_y \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta). \quad (5.1)$$

Коль скоро невозмущенное решение, которое подставляется в правую часть (4.1), является квазипериодическим, то и вариации $J_y(t)$, даваемые асимптотическим рядом, будут также квазипериодическими, причем с основными частотами Ω и $\langle \omega \rangle$, близкими к невозмущенным. Эти вариации, следовательно, будут ограниченными и малыми при достаточно малом параметре адиабатичности. В этом смысле такие квазипериодические вариации невозмущенного действия есть несущественный эффект возмущения. Что же существенно? На языке асимптотических разложений существенным является остаточный член такого разложения, к нахождению которого мы и переходим.

В заключение этого параграфа отметим, что квазипериодические колебания невозмущенного действия (5.1) можно использовать для введения «уточненного» действия $J_y^{(n)}$, нерезонансные изменения которого будут меньше, чем для J_y (n — порядок уточнения). В первом порядке, например, получаем из (5.1):

$$\begin{aligned} J_y^{(1)} &= J_y - \delta J_y = J_y \left(1 - \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta) \right) = \\ &= J_y \left(1 \mp \sqrt{2} \frac{x \sqrt{H^0 - J_y(1+x^2)}}{(1+x^2)^2} \sin(2\theta) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В последнем выражении мы использовали невозмущенное соотношение: $\dot{x} = \pm \sqrt{2(H^0 - J_y \omega_y)}$ [см. (3.4)]. Производная $\dot{J}_y^{(1)} \sim \varepsilon^2$, т. е. уже второго порядка по параметру адиабатичности (4.3). Введение уточненного действия эквивалентно широко распространенному в нелинейной механике каноническому преобразованию переменных, устраняющему нерезонансные члены возмущения. Для магнитных ловушек подобная процедура была впервые использована в работе [19] на модели типа (3.1) и в [17] для произвольного магнитного поля (см. также [18, 20]). Уточненное μ полезно при сравнении теории с результатами численного моделирования (см. [20] и ниже, § 7).

§ 6. Нелинейные резонансы

Как уже отмечалось выше, непериодические изменения μ , которые могут накапливаться, возникают за счет резонансов между ларморовским вращением частицы и высокими гармониками продольных колебаний. Для анализа этих резонансов перейдем в правой части уравнения (4.4) для μ к невозмущенным переменным действия μ , J и канонически сопряженным с ними фазам φ , ψ .

Производя фурье-преобразование по фазам, получаем

$$\dot{\mu} = \frac{1}{2} \sum_n \dot{f}_n(\mu, J) e^{i(\varphi - n\psi)} + \text{к. с.}, \quad (6.1)$$

причем $\dot{\varphi} = \langle \omega \rangle$; $\dot{\psi} = \Omega$, а n — любое целое. Вообще говоря, такой ряд Фурье будет двойным, т. е. будет включать также гармоники фазы φ . Так как, однако, $\langle \omega \rangle / \Omega \gg 1$, то амплитуды резонансных гармоник $n\varphi$ будут уже совсем малы по сравнению с \dot{f}_n , и мы ими пренебрежем. Условие резонанса имеет вид (n — целое положительное):

$$\langle \omega \rangle = n\Omega. \quad (6.2)$$

Вообще говоря, оно не выполняется. Однако из-за неизохронности невозмущенных колебаний, т. е. зависимости их частот ($\langle \omega \rangle$, Ω) от действий μ , J (см. § 3), всегда найдутся такие специальные (резонансные) значения $\mu = \mu_r$, $J = J_r$, для которых условие резонанса (6.2) будет выполнено с некоторым $n = r$.

Если амплитуды \dot{f}_n достаточно малы (условие малости будет получено ниже, см. § 10), то в уравнении (6.1) можно оставить только резонансный член

$$\dot{\mu} \approx |f_r(\mu_r, J_r)| \cos \psi_r, \quad (6.3)$$

где мы ввели резонансную фазу

$$\psi_r = \varphi - r\psi + \psi_r^0, \quad (6.4)$$

а $\psi_r^0(\mu_r, J_r)$ — некоторая постоянная: $f_r = |f_r| \exp(i\psi_r^0)$. При точном резонансе (6.2) $\psi_r = \text{const}$. Однако из-за изменения μ и зависимости частот $\langle \omega \rangle$, Ω от μ , J резонансная фаза также будет изменяться со временем. Уравнение для ψ_r можно записать в виде

$$\dot{\psi}_r \approx \langle \omega \rangle - r\Omega. \quad (6.5)$$

Это уравнение приближенное, так как ψ_r изменяется не только за счет изменения частот, но и непосредственно под действием возмущения. Последний эффект, однако, мал при малом возмущении, и мы им пренебрежем (более подробно этот вопрос обсуждается в [8]).

Возмущение изменяет не только μ , но и J . Однако в чисто магнитном поле энергия частицы сохраняется, и изменение J можно выразить через изменение μ . Будем считать поэтому, что как частоты $\langle \omega \rangle$, Ω , так и фурье-амплитуды \dot{f}_n зависят только от μ . Тогда уравнения (6.3) и (6.5) образуют полную систему, описывающую динамику одного резонанса. Уравнение (6.5) можно упростить, разложив правую часть вблизи резонанса:

$$\dot{\psi}_r \approx \frac{d\omega_r}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_r} (\mu - \mu_r); \quad \omega_r(\mu) = \langle \omega \rangle - r\Omega. \quad (6.6)$$

Вводя величину $\nu = \mu - \mu_r$ и замечая, что $\dot{\nu} = \dot{\mu}$, получаем пару канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\nu} &= |f_r(\mu_r)| \cos \psi_r; \\ \dot{\psi}_r &= \omega_r' \nu; \quad \omega_r' \equiv \frac{d\omega_r}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_r} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$H_r(\psi_r, \nu) = \frac{\omega'_r \nu^2}{2} - |f_r| \sin \psi_r. \quad (6.8)$$

Нетрудно заметить, что это — гамильтониан маятника, скажем, единичной длины с массой $1/\omega'_r$ в поле тяжести $mg = |f_r|$, причем ν — момент импульса маятника, а ψ_r — угол его отклонения от горизонтали. Поэтому говорят, что гамильтониан (6.8) описывает нелинейный резонанс в приближении маятника [8]. Условия этого простого приближения подробно обсуждаются в [8]. Существенным является как раз неизохронность невозмущенных колебаний: $\omega'_r \neq 0$. Благодаря этому колебания ν вблизи резонанса ограничены $(|\Delta\nu| \leq 2\sqrt{|f_r|/|\omega'_r|})$ и малы при малой $|f_r|$, поэтому в уравнении для ψ_r можно пользоваться разложением по ν (6.6).

Ограниченность колебаний ν (и μ) и, следовательно, ограниченный (и незначительный) обмен энергией между степенями свободы рассматриваемой системы составляют существенное отличие нелинейного резонанса от линейного. В последнем случае обмен был бы полным. Говорят, что нелинейность (неизохронность) колебаний стабилизирует резонансное возмущение. Переход к линейному резонансу в гамильтониане (6.8) соответствует $\omega'_r \rightarrow 0$, $\Delta\nu \rightarrow \infty$ (при этом приближение маятника, конечно, нарушается). Отметим также, что динамика нелинейного резонанса аналогична невозмущенному движению частицы в периодическом поле многопробочной ловушке [ср. (6.8) и (3.19)]. Эта аналогия потребует нам в дальнейшем (см. § 10).

Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что один нелинейный резонанс не представляет опасности для удержания частицы в магнитной ловушке, так как колебания μ на нем ограничены. Но на самом деле резонансов много (6.1). Если не пренебрегать остальными членами в (6.1), то гамильтониан (6.8) примет более сложный вид:

$$H_r(\psi_r, \nu) \approx \frac{\omega'_r \nu^2}{2} - \sum_n |f_n| \sin(\psi_r - (n-r)\Omega t + \psi_n^0 - \psi_r^0), \quad (6.9)$$

где мы положили приближенно $\psi \approx \Omega t$. Хотя разные члены последней суммы вызывают резонансы при разных начальных условиях (разных μ), всегда ли можно пренебрегать нерезонансным возмущением, как это сделано в (6.8)? Мы рассмотрим этот важный и, по существу, центральный вопрос несколько позже (см. § 10), а сейчас займемся вычислением резонансных амплитуд f_n . Для этого можно воспользоваться соотношением

$$\Delta\mu = T |f_r| \cos \psi_r, \quad (6.1)$$

которое получается интегрированием (6.1) по периоду продольных колебаний $T = 2\pi/\Omega$. С другой стороны, величина $\Delta\mu$ может быть найдена прямым интегрированием уравнения для $\dot{\mu}$ (4.4). Будем называть величину (6.10) резонансным $\Delta\mu$.

§ 7. Резонансное $\Delta\mu$

Итак, нашей очередной задачей является вычисление полного изменения невозмущенного действия ($\Delta\mu$) на периоде низкочастот-

ных (продольных) колебаний. Ниже мы сделаем это для набора типичных примеров, описанных в § 3. Начнем, как обычно, с простой вспомогательной системы (3.1). В этом случае необходимо вычислить интеграл [см. (4.1)]:

$$\frac{\Delta J_y}{J_y} \approx \Delta \ln J_n = 2 \int dt \frac{\dot{x}x}{1+x^2} \cos 2\theta \approx 2 \operatorname{Re} \int d\theta e^{2i\theta} \frac{\dot{x}x}{(1+x^2)^2}, \quad (7.1)$$

причем не асимптотически по малому параметру адиабатичности $\varepsilon = \Omega / \langle \omega \rangle$ (4.3), а в некотором смысле «точно». Сформулируем задачу более аккуратно. Так как подынтегральное выражение как функция времени нам не известно, то использование того или

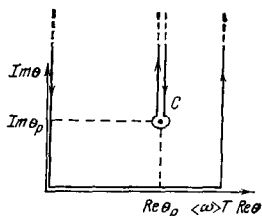


Рис. 4. Контур интегрирования в плоскости комплексного θ при вычислении ΔJ_y и $\Delta \mu$: C — обход особенности по разрезу; θ_p — положение особенности

инного метода последовательных приближений неизбежно. Поэтому подставим в качестве подынтегральной функции невозмущенное решение, в частности $J_y = \text{const}$, что уже учтено в соотношении $d\theta = (1+x^2)dt$ для последнего представления интеграла (7.1). При интегрировании по частям в § 5 мы интегрировали, по существу, лишь высокочастотный сомножитель, «загоняя» все эффекты низкочастотной части (в том числе и ее высокие гармоники) в остаточный член, который оставался неопределенным. Теперь же мы проинтегрируем невозмущенное подынтегральное выражение точно (со всеми его гармониками), что оказывается возможным в ряде случаев путем аналитического продолжения подынтегральной функции в комплексную плоскость переменной интегрирования. Если выбрать в качестве последней фазу θ , как это сделано, например, в работе [5], то можно замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости θ и пренебречь вкладом в интеграл от бесконечно удаленной части этого контура ($\operatorname{Im} \theta \rightarrow +\infty$). Значение интеграла будет определяться при этом особенностями подынтегрального выражения, которые обходятся с помощью разрезов (рис. 4).

При выполнении условия резонанса (6.2) сумма интегралов по двум вертикальным прямым также равна нулю, так как квазипериодическая зависимость невозмущенного решения от времени (две несоизмеримые частоты $\langle \omega \rangle$ и Ω) переходит в резонансе в периодическую с периодом T ($\langle \omega \rangle T = 2\pi n$). Вне резонанса эта сумма, вообще говоря, не равна нулю из-за разного значения функции $\exp(2i\theta)$ на обеих прямых. Это приводит к квазипериодической добавке к $\Delta \mu$ (см. § 5), которая, однако, нас не интересует.

Для интеграла (7.1) единственной особенностью в верхней полуплоскости θ является полюс при $x_p = i$. Заметим сразу, что в этой особенности частота $\omega_y = 0$ и, таким образом, она является также и седловой точкой (перевалом) функции $\exp(2i\theta)$.

Так как за один период x -колебаний особенность проходит 2 раза, то достаточно вычислить интеграл на полупериоде $T/2$. Вблизи особенности $\omega_y(x_p) = 1 + x_p^2 = 0$; $\theta = \theta_p$

$$\theta - \theta_p \approx \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_p (x - x_p) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)_p (x - x_p)^2 = \frac{x_p}{v_0} (x - x_p)^2, \quad (7.2)$$

так как $(d\theta/dx)_p = \omega_y(x_p)/\dot{x}_p = 0$, а $(d^2\theta/dx^2)_p = (d\omega_y/dx)_p/\dot{x}_p$ и $\dot{x}_p = \sqrt{2H^0} = v_0$ [см. (3.4)], где $v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$ — полная скорость в минимуме потенциальной энергии ($x=0$). Далее,

$$(1 + x^2)^2 \approx (2x_p)^2 (x - x_p)^2 \approx 4x_p v_0 (\theta - \theta_p).$$

Подставляя это выражение в (7.1) и вычисляя вычет в полюсе, получаем

$$\Delta \ln J_y = \pi \operatorname{Re} \left(i e^{2i\theta_p} \right). \quad (7.3)$$

Отметим, что если бы мы вычисляли интеграл в комплексной плоскости t или x , то получили бы другой (неправильный) результат:

$$\Delta \ln J_y = 2 \operatorname{Re} \int \frac{xdx}{1+x^2} e^{2i\theta} = 2\pi \operatorname{Re} \left(i e^{2i\theta_p} \right).$$

Разница возникает за счет того, что функция $\exp(2i\theta(x))$, вообще говоря, не убывает при $\operatorname{Im} x \rightarrow \infty$, и поэтому интеграл не сводится к вычету в полюсе. Наконец, можно поступить следующим образом. Будем считать, что последний интеграл берется по контуру в плоскости θ , но мы просто заменили переменную интегрирования на x . Так как $x - x_p \propto \sqrt{\theta - \theta_p}$, то при обходе особенности в плоскости θ [комплексный вектор $(\theta - \theta_p)$ поворачивается на угол 2π] вектор $(x - x_p)$ поворачивается только на угол π . Поэтому значение интеграла по dx равно полувычету в полюсе, что в точности совпадает с (7.3).

Найдем теперь θ , которое можно представить в виде

$$\theta_p = \theta_0 + \int_0^{t_p} \omega_y dt = \theta_0 + \int_0^{x_p} \frac{\omega_y dx}{\dot{x}}, \quad (7.4)$$

где $\theta_0 = \operatorname{Re} \theta_p$. Для вычисления этого интеграла воспользуемся невозмущенным решением, например, в форме [см. (3.4)]:

$$\dot{x} = \sqrt{2J_y (a_x^2 - x^2)}, \quad (7.5)$$

где a_x — амплитуда продольных колебаний. Учитывая, что $\omega_y = 1 + x^2$ и $x_p = i$, получаем из (7.4):

$$\theta_p = \theta_0 + \frac{i\chi(\sin \beta_0)}{2v_0}; \quad \chi(u) = \frac{1}{u^2} \left(\frac{1+u^2}{2u} \ln \frac{1+u}{1-u} - 1 \right), \quad (7.6)$$

где $\sin \beta_0 = \dot{y}_0/v_0$. В таком виде выражение для показателя экспоненты, определяющего порядок резонансного возмущения, было получено (для магнитной ловушки) в работе [21] и позднее в [5]. Оно справедливо, конечно, только для гармонических продольных колебаний, что было явно использовано при интегрировании (7.4). С другой стороны, соотношение (7.6) слишком сложно и неудобно для дальнейшего использования. Простое приближение для θ_p получается, если в (7.4) положить $\dot{x} \approx \dot{x}_0 = \text{const}$. Тогда

$$\theta_p \approx \theta_0 + \frac{2i}{3v_0 \cos \beta_0}. \quad (7.7)$$

Условие $\dot{x} \approx \dot{x}_0$ будем называть приближением малых β_0 , так как для его справедливости необходимо, чтобы $\dot{x}_0 = v_0 \cos \beta_0 \approx \dot{x}_p = v_0$. Отсюда $\cos \beta_0 \approx 1$, или $\beta_0 \ll 1$. Выражение (7.7) получается, конечно, и прямо из формулы (7.6) при $\sin \beta_0 \rightarrow 0$. Однако в более общем случае выражение для θ_p в приближении малых β_0 зависит от вида функции $\omega_y(x)$ (см. ниже). Для рассматриваемых здесь гармонических колебаний сравнение (7.6) и (7.7) показывает, что различие между ними не превосходит 10% при $\beta_0 \leq 50^\circ$. В дальнейшем мы ограничимся для простоты приближением малых β_0 .

В этом приближении для рассматриваемой модельной системы получаем из (7.3):

$$\Delta \ln J_y = -\pi \exp \left[-\frac{4}{3v_0 \cos \beta_0} \right] \sin(2\theta_0). \quad (7.8)$$

Если особенность подынтегрального выражения более сложная, чем полюс, например точка ветвления, то описанный выше метод интегрирования не работает. Более общий метод, использованный, в частности, в [15], состоит в приведении интеграла по разрезу (см. рис. 4) к Γ -функции с помощью соотношения (см., например, [22]):

$$\int_C \frac{e^{-u} du}{(-u)^p} = \frac{2\pi i}{\Gamma(p)}, \quad (7.9)$$

где в нашем случае $u = -i(\theta - \theta_p)$; $p > 0$ и контур интегрирования C показан на рис. 4 (он обходится в отрицательном направлении). Используя (7.2), приводим интеграл (7.1) (по $d\theta$) к виду (7.9) с $p=1$, что снова дает (7.3).

В задаче о движении частицы в магнитной ловушке необходимо вычислить интеграл [см. (4.4)]:

$$\frac{\Delta \mu}{\sqrt{2\mu}} \approx \Delta \sqrt{2\mu} = \int dt \frac{v_{\parallel}^2}{R \sqrt{\omega}} \sin \theta \approx \text{Im} \int d\theta e^{i\theta} \frac{v_{\parallel}^2}{R\omega^{3/2}}. \quad (7.1)$$

Особенности подынтегрального выражения определяются теперь не только функцией $\omega(s)$, но и функцией $R(s)$. Поэтому прежде всего необходимо найти достаточно простое выражение для радиуса кривизны магнитной линии.

В присоевом приближении вектор-потенциал поля дается соотношением (3.7), а уравнение магнитной линии есть $rA_\varphi = \text{const}$, или:

$$r^2 f(s) = r_0^2, \quad (7.11)$$

где r_0 — расстояние от оси симметрии до магнитной линии в минимуме поля [$s=0$; $f(0)=1$]. Отсюда

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{3r_0}{4} \frac{(f')^2}{f^{5/2}} - \frac{r_0}{2} \frac{f''}{f^{3/2}} \rightarrow \frac{3r_0}{4} \frac{(f')^2}{f^{5/2}}, \quad (7.12)$$

считая, что $(dr/ds)^2 \ll 1$ (присоевое приближение). Отметим прежде всего, что в этом приближении особенность R совпадает с особенностью ω , так как обе величины пропорциональны f^p . Далее ясно, что основной вклад дает член с наиболее сильной особенностью (максимальное p , см. ниже). Поэтому в (7.12) мы оставили лишь первое слагаемое. Соотношение (7.2) вблизи особенности имеет теперь вид:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_p &\approx \left(\frac{d\theta}{ds} \right) (s - s_p) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\theta}{ds^2} \right)_p (s - s_p)^2 = \\ &= \frac{\omega_0 f'_p}{2v} (s - s_p)^2 \approx \frac{\omega_0}{2v f'_p} f^2, \end{aligned} \quad (7.13)$$

так как $d\theta/ds = \omega/\dot{s} = 0$ при $s = s_p$; $(d^2\theta/ds^2)_p = (d\omega/ds)_p / \dot{s}_p = \omega_0 f'_p / v$ [см. (2.3)]. В равенстве (7.13) использовано соотношение $f(s) \approx f(s_p) + f'_p (s - s_p) = f'_p (s - s_p)$. Заметим, что множитель в (7.13) $\omega_0 / v f'_p \sim \omega_0 L / v \sim 1/\epsilon \gg 1$ [см. (4.3)]. Поэтому каждая лишняя степень f в знаменателе интеграла (7.10) увеличивает его значение в $\sim \epsilon^{-1/2}$. Это и оправдывает учет только основной особенности подынтегральной функции.

Отсюда можно понять также, почему остаточный член асимптотического ряда по ϵ для $\delta\mu$ (см. § 5) не уменьшается с ростом числа членов такого ряда. С одной стороны, производная по времени от каждого следующего уточненного $\mu^{(n)}$ уменьшается в ϵ раз, но, с другой стороны, в знаменателе выражения для $\mu^{(n)}$ при этом появляется лишнее ω^2 [одно ω — за счет интегрирования $\exp(i\theta)$, а другое — за счет дифференцирования знаменателя]. В результате интеграл от $\mu^{(n)}$ не зависит от порядка уточнения и его проще всего вычислять от невозмущенного μ .

Собирая все соотношения, приводим интеграл (7.10) к виду (7.9) с $p=2$ и получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sqrt{\mu} &= -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} r_0 \sqrt{\omega_0} \text{Im}(e^{i\theta_p}); \\ \frac{\Delta\mu}{\mu} &\approx -\frac{3\pi}{4} \frac{r_0 \omega_0}{v_{\perp 0}} \text{Im}(e^{i\theta_p}). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Так как в данном случае p — целое, то интеграл может быть выражен, конечно, и через вычет в полюсе.

Отметим, что в рассматриваемом приосевом приближении конфигурация магнитного поля влияет только на величину θ_p (если f'_p конечна, см. ниже). Более общее и соответственно значительно более сложное выражение для $\Delta\mu$, не ограниченное приосевой областью, получено в [5] [см. формулу (32)]. Ее анализ показывает, что основным условием приосевого приближения является неравенство

$$\frac{r_0^4}{L\rho_m^3} \ll 1, \quad (7.15)$$

где $\rho_m = v/\omega_0$ — максимальный ларморовский радиус частицы (при $\beta_0 = \pi/2$), а L — продольный масштаб ловушки (см. § 3). Выражение (4.4), на котором основан вывод (7.14), получено при дополнительном упрощающем предположении, что $\rho_m \ll r_0$ (см. § 4). Однако более подробный анализ [8] показывает, что в приосевом приближении все соотношения остаются без изменения и для $r_0 < \rho_m$. В частности, при $r_0 = 0$, когда центр ларморовской окружности движется по оси симметрии поля, $\Delta\mu = 0$, так как в этом случае μ совпадает с точным интегралом — каноническим моментом, сопряженным азимутальному углу φ [см. (2.1)]:

$$(\mathbf{r} \times (\mathbf{p} + \mathbf{A}))_z = r(p_\perp + \mathbf{A})_\varphi = \frac{v_\perp^2}{2\omega} = \mu.$$

Отметим также, что выражения (7.14) одинаково справедливы на обоих полупериодах продольных колебаний.

Вычисление θ_p в (7.14) производится по формуле, аналогичной (7.4):

$$\theta_p = \theta_1 + \omega_0 \int_{s_1}^{s_p} \frac{f(s) ds}{\dot{s}(s)}, \quad (7.16)$$

где $\theta_1 = \theta(s_1)$ и $s_1 = \text{Re}(s_p)$. В общем случае $s_1 \neq 0$ (см. ниже).

Для короткой ловушки (см. § 3, п. 2) $f(s) = 1 + s^2/L^2$ и $s_p = iL$; $s_1 = 0$; $\theta_1 = \theta_0$. В приближении малых β_0 [$\dot{s}(s) \approx \dot{s}_0$] получим аналогично (7.7):

$$\theta_p \approx \theta_0 + \frac{2i}{3} \frac{L}{\rho_m \cos \beta_0}. \quad (7.17)$$

Это же выражение применимо (с некоторым эффективным $L_{\text{эф}}$) и в случае многопробочной ловушки (см. § 3, п. 4). Величина $L_{\text{эф}}$ определяется разложением $f(s)$ в окрестности $s=0$. Из (3.18) имеем

$$f(s) \approx 1 + (\pi s/2L)^2 (\lambda - 1), \quad (7.18)$$

откуда

$$L_{\text{эф}} = \frac{2L}{\pi \sqrt{\lambda - 1}}. \quad (7.19)$$

Так как особенность расположена в точке $s_p = iL_{\text{эф}}$, то при большом пробочном отношении $\lambda \gg 1$ величина $|s_p| \ll L$ и разложение (7.18) действительно применимо. Это же условие ($\lambda \gg 1$) обеспечивает малость β_0 для частиц вблизи сепаратрисы многопробочной ловушки, для которых $\sin \beta_0 = 1/\sqrt{\lambda} \ll 1$ (см. § 3). Существенно, что в рассматриваемом случае нет других особенностей, кроме $s_p \approx iL_{\text{эф}}$. Это видно из точного выражения для s_p :

$$\cos(\pi s_p/L) = (\lambda + 1)/(\lambda - 1) \text{ [см. (3.18)].}$$

По-иному обстоит дело для длинной ловушки в модели (3.13). Здесь в верхней полуплоскости s имеется $n/2$ особенностей (n — четное) в точках

$$s_k = L \exp\left[i \frac{\pi}{n} (1 + 2k)\right], \quad (7.20)$$

где k пробегает целые значения от 0 до $(n/2 - 1)$. Наибольший вклад в $\Delta\mu$ дают две ближайшие к действительной оси особенности, соответствующие $k = n/2 - 1$ и $k = 0$:

$$s_p = \mp L \cos(\pi/n) + iL \sin(\pi/n) \approx \mp L + i\pi L/n. \quad (7.21)$$

Последнее приближенное выражение справедливо при $n \gg \pi$, т. е. как раз для длинной ловушки.

Из связи между θ и s (7.16) в приближении малых β_0 ($\beta \approx v$):

$$\theta = \frac{\omega_0 s}{v} \left[1 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{s}{L} \right)^n \right] + \text{const} \quad (7.22)$$

видно, что особенности θ_k в плоскости θ также лежат на окружности ($s^{n_k} = -L^n$), причем ближайшие к действительной оси особенности хорошо отделены друг от друга. Так, для соседней с s_p (7.21) особенности $\text{Im}\theta_k$ втрое больше, чем для s_p . Это оправдывает пренебрежение всеми особенностями, кроме s_p (7.21). Постоянная в (7.22) определяется величинами θ_1 и $s_1 \approx \mp L$. Окончательно получаем:

$$\theta_p \approx \theta_1 \pm \frac{2n}{n+1} \frac{l}{\rho_m} + i\pi \frac{n}{n+1} \frac{l}{\rho_m} \approx \theta_1 \pm \frac{2l}{\rho_m} + i\pi \frac{l}{\rho_m}. \quad (7.23)$$

Мы видим, что порядок $\Delta\mu$ определяется теперь размером пробки $l = L/n$, а не всей ловушки. Помимо этого, фаза, от которой зависит $\Delta\mu$, не равна теперь ларморовской фазе θ_1 при $s = s_1$, а сдвинута на большую величину $2l/\rho_m \gg 1$, причем в противоположные для обеих особенностей стороны. Выражение (7.14) для $\Delta\mu$ остается справедливым и в этом случае для каждой из двух главных особенностей. Однако, в отличие от предыдущих примеров, изменения μ на двух полупериодах продольных колебаний

(т. е. при пролете частицы через ловушку туда и обратно) не вполне симметричны. Именно, знак дополнительного сдвига фазы $2l/\rho_m$ изменяется на обратный.

Вместо сдвига фазы на $\pm 2l/\rho_m$ в точке $s=s_1$ можно сдвинуть по s точку, в которой берется фаза θ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(s_1) \pm 2l/\rho_m &\rightarrow \theta_1(s_1 + \Delta s_1), \\ \Delta s_1 &\approx \pm (2l/\rho_m)/(d\theta/ds) \approx \pm 2l; \quad \Delta |s_1| \approx -2l. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

В обоих пробках точка сдвигается к центру ловушки. Поле в сдвинутых точках

$$\omega_1/\omega_0 \approx 1 + (1 - 2/n)^n \approx 1 + e^{-2} \approx 1 \quad (7.25)$$

мало отличается от поля в центре ловушки. Можно сказать, что сдвинутые точки расположены у внутреннего края пробок.

Для ловушек со встречными пробками (см. § 3, п. 5 и 6) просонового приближения не существует, и вычисление $\Delta\mu$ должно быть произведено заново. Эта задача была решена в работе [15].

Рассмотрим сначала плоскую геометрию встречных пробок (см. § 3, п. 5). В отличие от многопробочной ловушки (см. п. 4) квадратичное разложение поля вблизи минимума (3.35) в данном случае не годится, так как его особенность расположена слишком далеко, при $|s_p|=r_0$, где разложение уже не работает [см. (3.34)]. Для того чтобы обойти эту трудность, заметим, что хотя контур интегрирования (7.10) должен быть взят в плоскости θ , переменная интегрирования и (или) аргумент подынтегральной функции могут быть любыми. Для выбора наиболее удобной переменной запишем ларморовскую частоту в виде [см. (3.33)]:

$$\omega = \frac{\omega_0}{r_0} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\omega_0 r_0}{2x} \sqrt{1 + \frac{4x^4}{r_0^4}}, \quad (7.26)$$

где мы использовали уравнение магнитной линии $2xy=r_0^2$. Если теперь выбрать в качестве аргумента функции $\omega(\xi)$, например, величину

$$\xi = 2x^2/r_0^2; \quad \omega(\xi) = \omega_0 \sqrt{(1 + \xi^2)/2\xi}, \quad (7.27)$$

то положение особенности в плоскости комплексного ξ будет $\xi_p=i$, а $\xi_0=1$ [в минимуме $\omega(\xi)$ на данной магнитной линии].

Найдем прежде всего связь между новой переменной ξ и фазой θ . Имеем:

$$\theta = \int \omega dt = \int \frac{\omega(\xi)}{\dot{s}(\xi)} \frac{ds}{d\xi} d\xi \approx \frac{q_2}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right). \quad (7.28)$$

Последнее выражение справедливо в приближении малых β_0 , когда $\dot{s}(\xi) \approx \dot{s}_0 \approx v$, и мы использовали соотношение

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{r_0}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi^{3/2}}, \quad (7.29)$$

а $q_2 = \omega_0 r_0 / 2v = r_0 / 2\rho_m$ — большой параметр задачи. В том же приближении

$$\theta_p = \theta_0 + iq_2. \quad (7.30)$$

Кривизна магнитной линии получается из уравнения линии $2xy = r_0^2$:

$$\frac{1}{R(\xi)} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{r_0^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\omega_0^3}{r_0 \omega^3(\xi)}. \quad (7.31)$$

Как и в предыдущих примерах, кривизна выражается через поле и имеет особенность в той же точке $\xi = \xi_p = i$. В минимуме поля радиус кривизны $R_0 = r_0$, т. е. равен минимальному удалению линии от центра ловушки $x = y = 0$ (см. рис. 2, а).

В качестве переменной интегрирования выберем по-прежнему величину

$$u = -i(\theta - \theta_p) \approx \frac{iq_2}{2\xi_p^3} (\xi - \xi_p)^2. \quad (7.32)$$

Последнее выражение получается разложением функции $\theta(\xi)$ (7.28) вблизи особенности. В этой же области

$$\omega \approx \omega_0 (\xi - \xi_p)^{1/2} \approx \left(-\frac{2u}{q_2}\right)^{1/4}. \quad (7.33)$$

[см. (7.27)]. Подставляя все эти выражения в интеграл (7.10) для $\Delta\mu$, приводим его к виду (7.9) с $p = 9/8$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\sqrt{\mu} &= \frac{\pi}{2^{13/8}\Gamma(9/8)} \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_2^{1/2} e^{-q_2} \sin \theta_0 \approx \\ &\approx 1,08 \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_2^{1/2} e^{-q_2} \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Это в точности совпадает с результатом работы [15] (при $\beta_0 \ll 1$), если исправить имеющиеся там опечатки. Отметим, что в [15] использовался несколько иной метод, в котором в качестве переменной интегрирования был выбран скалярный потенциал магнитного поля.

В случае цилиндрической геометрии встречных пробок (п. 6) схема вычисления $\Delta\mu$ остается той же самой. В качестве аргумента подынтегральной функции выбираем величину $\xi = r^3 / 2b^3$, где b — параметр магнитной линии $zr^2 = b^3 = (l_0/\sqrt{3})^3$ (см. рис. 2, б). Тогда

$$\omega(\xi) = \omega_0 \frac{2^{1/2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi^{2/3}} \quad (7.35)$$

и

$$\theta(\xi) = 2^{-1/2} q_3 \xi^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2}\right), \quad (7.36)$$

а $q_3 = \omega_0 l_0 / 3v = l_0 / 3\rho_m \gg 1$. Используя ту же переменную интегрирования $u = -i(\theta - \theta_p)$, приходим к особенности того же порядка $p = 9/8$ и получаем

$$\begin{aligned} \Delta \sqrt{\mu} &= \frac{\pi \cdot 3^{1/8}}{2^{11/8} \Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_3^{1/8} e^{-\alpha q_3} \sin(\theta_0 - \Delta) = \\ &= 1,07 \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_3^{1/8} e^{-\alpha q_3} \sin(\theta_0 - \Delta); \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\Delta = \frac{11}{48} \pi + 0,155 q_3; \quad \alpha = 1,031 \approx 1.$$

Отметим прежде всего, что при соответствующем выборе параметров q выражения для $\Delta \mu$ очень близки между собой для обоих типов встречных пробок. Наиболее существенное различие связано со сдвигом фазы Δ в последнем случае. Причина этого та же, что и в длинной ловушке — несимметричная конфигурация поля относительно особенности. Здесь также можно ввести эквивалентный сдвиг точки, в которой берется ларморовская фаза, определяющая величину $\Delta \mu$: $\theta_0 (s=0) \rightarrow \theta_1 (s=s_1)$, где

$$s_1 \approx -v \Delta / \omega_0 \approx -l_0 / 19. \quad (7.38)$$

Заметим, что в обоих случаях сдвиг происходит в сторону меньшего градиента поля.

Выражение (7.37) совпадает с результатом работы [15], за исключением постоянного сдвига фазы $11\pi/48$, который отличается в [15] на $+\pi/4$. Это различие связано, возможно, с тем, что в [15] интегрирование производится по контуру в плоскости комплексного z , а не θ .

Во всех рассмотренных случаях резонансное изменение $\Delta \mu$ оказывается экспоненциально малым по параметру адиабатичности $\varepsilon = \Omega / \langle \omega \rangle \sim \Omega / \omega_0 \sim \rho_m / L$. Поэтому возникает серьезный вопрос, насколько надежны оценки столь малой величины, особенно ввиду пренебрежения значительно большими ($\sim \varepsilon$) квазипериодическими вариациями μ . Подобные опасения по поводу рассматриваемой и аналогичных задач неоднократно высказывались в литературе. Это, казалось бы, подтверждается тем, что предэкспоненциальные множители в выражении для резонансного $\Delta \mu$ получаются разными у разных авторов. Некоторые заходят столь далеко, что опасаются даже степенной по ε поправки к $\Delta \mu$. Последнее, однако, полностью исключается по следующим соображениям. В работе [17] показано, что асимптотические поправки к μ в любом порядке по ε являются квазипериодическими. Следовательно, непериодическое (резонансное) изменение μ уменьшается с ε быстрее любой степени ε , т. е. экспоненциально. К такому же выводу можно прийти и значительно проще, исходя из точного выражения для $\Delta \mu$ (4.4). Действительно, в случае аналитической

зависимости правой части от времени, или от фазы θ (а это всегда имеет место для реальных полей), мы можем сдвинуть путь интегрирования (по θ) вдоль мнимой оси ($\text{Im } \theta = 0 \rightarrow \text{Im } \theta = \theta_s = \text{const}$), что приведет к появлению постоянного множителя $\exp(-\theta_s)$ [после замены $\sin \theta \rightarrow \text{Im } \exp(i\theta)$]. А так как $\theta_s \propto \omega \propto 1/\varepsilon$, то $\Delta\mu \propto \exp(-A/\varepsilon)$, т. е. убывает экспоненциально при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сложнее оказывается вопрос о точности полученных выше выражений для резонансного $\Delta\mu$. Трудность здесь заключается в том, что в высших приближениях гармоники низкой частоты Ω , вообще говоря, усиливаются и в принципе могут как-то изменить показатель экспоненты и (или) предэкспоненциальный множитель. Все же можно, по-видимому, утверждать, что относительная поправка к $\Delta\mu$ является малой при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это связано со специфической структурой интеграла для $\Delta\mu$ (7.10). Хотя мы и не знаем подынтегрального выражения как функции t , мы можем выразить его через точно известные функции $\omega(s)$, $R(s)$ (заданная конфигурация магнитного поля) и, вообще говоря, неизвестную (точно) функцию $v(s)$. Последняя, однако, нужна только в особенности, где $\omega = \omega(s_p) = 0$ и $v_{\parallel}(s_p) = v$; $v_{\perp}(s_p) = 0$ из-за $v_{\perp}^2 = 2\mu\omega$. Существенно, что этот результат [$v_{\perp}(s_p) = 0$] не зависит от поправок к μ , если только они малы, т. е. при достаточно малом ε . Таким образом, все сложности зависимости $v(s)$ в высших приближениях не сказываются на интегральном значении $\Delta\mu$. Физически это означает, что вклад высших приближений в зависимость $\mu(t)$ компенсируется на полупериоде $T/2$. Попутно заметим, что из-за $v_{\perp}(s_p) = 0$ в уравнении для μ можно отбросить не только члены с $\sin(2\theta)$, но и члены вида $v_{\perp}^2 \sin \theta$, как это сделано в (4.4) (ср. с полным уравнением в [5]).

Остается обсудить вычисление θ_p по формуле (7.16). В приближении малых β_0 поправки к \dot{s} несущественны. В общем случае [см., например, (7.6)] поправка к θ_p пропорциональна интегралу от $\delta\mu$. Последняя описывается выражением вида (5.1), так что $|\delta\mu| \sim \varepsilon$ и пропорциональна быстро осциллирующей функции $\cos \theta$ (для частицы в ловушке). Поэтому интеграл от $\delta\mu$ имеет порядок ε^2 , и поправка к θ_p , несмотря на большой множитель $1/\varepsilon$ в (7.16), оказывается малой ($\lesssim \varepsilon$).

Результаты численного моделирования показывают, что типичная погрешность первого приближения для $\Delta\mu$ порядка 10 % (см., например, [5]). В некоторых специальных случаях точность может быть даже выше [15]. Эти цифры включают также погрешность выделения резонансного значения $\Delta\mu$ на фоне значительно больших, вообще говоря, квазипериодических колебаний $\delta\mu$ (см. § 5). Как уже отмечалось выше, использование явных выражений для уточненного μ существенно облегчает эту задачу (см. [15, 20]). Еще более эффективным методом может служить использование резонансных траекторий для численного моделирования. В этом случае квазипериодические вариации компенсируются в обеих точках отражения.

Отметим, что экспоненциально малое резонансное $\Delta\mu$ было впервые получено в работе [16] из решения соответствующей квантово-механической задачи. Относительно простая техника вычисления в рамках классической механики, описанная выше, была предложена в [20] и затем развивалась в ряде работ (см. например [5, 15, 21]). Наиболее обширные вычисления проведены в [5].

§ 8. Отображение

Величина $\Delta\mu$, найденная в предыдущем параграфе, сама по себе не только не решает задачи о длительном удержании частицы в ловушке, но и вообще не имеет значения, так как в типичных случаях $\Delta\mu \ll \delta\mu$ — квазипериодических колебаний μ . Центральным вопросом в проблеме длительного удержания частицы в ловушке является вопрос о накоплении последовательных изменений $\Delta\mu$. Для решения этой последней задачи можно пойти двумя путями. Первый связан с анализом гамильтониана (6.9), который описывает систему взаимодействующих резонансов с амплитудами, определяемыми величиной $\Delta\mu$ (6.10). Второй путь — это описание движения частицы с помощью отображения, или преобразования, т. е. не непрерывно, а через некоторые конечные интервалы времени. Ниже мы используем второй путь, который оказался проще и удобнее (см. [2]). В качестве характерного интервала времени удобно взять полупериод продольных колебаний $T/2$, к которому относится величина $\Delta\mu$. Последняя как раз и характеризует изменение одной из динамических переменных системы — действия μ на этом интервале. Этого, однако, недостаточно для полного описания движения, так как $\Delta\mu$ зависит от другой динамической переменной — ларморовской фазы θ в некоторой точке магнитной линии (в простейшем случае — в минимуме поля). Нам необходимо поэтому прежде всего найти изменение θ между последовательными прохождениями этой точки. Эта задача решается, вообще говоря, по-разному в зависимости от конкретной конфигурации магнитного поля.

Начнем с модели (3.1). Согласно результатам § 7 величина ΔJ_y определяется в этом случае значением фазы θ в минимуме потенциала ($x=0$). Поэтому изменение θ между последовательными прохождениями этого минимума, т. е. за полупериод x -колебаний, можно записать в виде

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\pi}{\omega_x} \langle \omega_y \rangle = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2J_y}} + \frac{J_x}{2J_y} \right). \quad (8.1)$$

В последнем выражении мы использовали связь частот ω_x , $\langle \omega_y \rangle$ с действиями J_x , J_y (3.5).

В таком виде, однако, соотношение (8.1) еще не решает поставленной задачи, так как появляется новая динамическая переменная (J_x), и для нее требуется еще одно уравнение. Однако вместо нахождения уравнения для ΔJ_x можно выразить J_x через J_y с помощью закона сохранения энергии $H^0(J_x, J_y) = \text{const}$. Из выражения (3.4) находим

$$J_x = (H^0 - J_y) / \sqrt{2J_y} = (v_0^2 - 2J_y) / 2 \sqrt{2J_y}, \quad (8.2)$$

откуда

$$\Delta\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2J_y}} + \frac{v_0^2}{(2J_y)^{3/2}} \right). \quad (8.3)$$

Пусть теперь J_y , θ_0 — значения динамических переменных при каком-то прохождении минимума потенциала, а \bar{J}_y , $\bar{\theta}_0$ — значения этих же переменных при следующем прохождении. Отображением называется связь между этими двумя параметрами: J_y , $\theta_0 \rightarrow \bar{J}_y$, $\bar{\theta}_0$. Вводя для удобства новую фазу $\vartheta = 2\theta$, можно записать эту связь в нашем случае в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_y &= J_y + (\Delta J_y)_m \sin \vartheta_0; \\ \bar{\vartheta}_0 &= \vartheta_0 + G(\bar{J}_y); \\ (\Delta J_y)_m &\approx -\pi J_y \exp[-4/3 v_0 \cos \beta_0], \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

[см. (7.8)], а функция $G(J_y) \equiv 2\Delta\theta_0(J_y)$ берется при $J_y = \bar{J}_y$, т. е. для значения J_y после первого прохождения, которое как раз и определяет разность двух последовательных значений фазы ϑ_0 .

Отображение полностью описывает эволюцию рассматриваемой модели в ее фазовом пространстве (J_y, ϑ_0) . Это пространство в данном случае является полуцилиндром, так как $J_y \geq 0$, а ϑ_0 — фаза, определенная с точностью до целого кратного 2π . При заданной энергии $H^0 = v_0^2/2$ движение ограничено областью $J_y \leq H^0$ (8.2). Термин отображение связан с тем, что разностные уравнения (8.4) преобразуют (или отображают) фазовый полуцилиндр на себя, т. е. каждая точка этого полуцилиндра переходит в одну из точек этой же поверхности.

Отображение (8.4) не является каноническим, т. е. не сохраняет меру (площадь) фазовой поверхности. Действительно, если положить для простоты $\cos \beta_0 = 1$ ($\beta_0 \ll 1$), то якобиан отображения

$$\frac{\partial(\bar{J}_y, \bar{\vartheta}_0)}{\partial(J_y, \vartheta_0)} = 1 + \frac{\partial(\Delta J_y)_m}{\partial J_y} \sin \vartheta_0 \neq 1. \quad (8.5)$$

Поскольку исходная система (3.1) каноническая, или гамильтонова, то результат (8.5) просто означает, что отображение (8.4) не является точным. Действительно, соотношение (7.8) определяет изменение не J_y , а $\ln J_y$. Если принять по-прежнему, что $\cos \beta_0 = 1$ и ввести новую переменную $P = \ln J_y$, то отображение

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \vartheta_0; \quad \bar{\vartheta}_0 = \vartheta_0 + G(\bar{P}) \quad (8.6)$$

оказывается уже каноническим, так как $(\Delta P)_m = \pi \exp(-4/3 v_0)$ не зависит от P .

Отметим, что если бы мы сохранили зависимость показателя экспоненты в $(\Delta P)_m$ от β_0 [$\cos \beta_0$ или, в общем случае, зависимость (7.6)], а следовательно, и от J_y , то последнее отображение стало бы опять неканоническим из-за $\partial(\Delta P)_m / \partial J_y \neq 0$. С этим связано еще одно преимущество приближения малых β_0 . В этом приближении во всех рассмотренных выше примерах можно выбрать такую переменную P , что $\partial(\Delta P)_m / \partial P = 0$, и отображение вида (8.6) (см. ниже) оказывается каноническим.

Каноничность отображения существенна для использования некоторых общих теорем эргодической теории и необходима при численном моделировании, так как в противном случае возможно быстрое накопление ошибок из-за несохранения фазовой площади.

Для некоторых конфигураций магнитного поля отображение, описывающее движение частицы в ловушке, оказывается таким же, как и (8.6). Например, для короткой ловушки (см. § 3, п. 2) вводим переменную $P = \sqrt{\mu}$ [см. (7.14) и (7.17)] и получаем:

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \theta_0; \quad \bar{\theta}_0 = \theta_0 + G(\bar{P}), \quad (8.7)$$

где

$$(\Delta P)_m = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} r_0 \sqrt{\omega_0} e^{-q} \quad (8.8)$$

и

$$G(P) = \frac{\pi \langle \omega \rangle}{\Omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} L \sqrt{\omega_0} \left(\frac{1}{P} + \frac{v^2}{2\omega_0 P^3} \right). \quad (8.9)$$

Последнее выражение можно написать сразу из (8.3) ввиду полной аналогии выражений (3.4), (3.11) и (3.5), (3.12). Параметр адиабатичности в данном случае $\varepsilon \sim 1/q = 3\rho_m/2L$.

Такой же вид имеет отображение и для многопробочной ловушки (см. п. 4), а также для плоской геометрии встречных пробок (см. п. 5). Во всех этих случаях на полупериоде продольных колебаний (один пролет частицы через ловушку) имеется только одна особенность, а движение симметрично относительно минимума поля. Отображение для остальных примеров § 3 будет построено позднее (см. § 14). Заметим сразу, что во всех примерах магнитных ловушек переменная $P = \sqrt{\mu}$, поскольку при вычислении $\Delta\mu$ мы всегда использовали уравнение (4.4).

В случае многопробочной ловушки ограничимся областью вблизи сепаратрисы (см. п. 4, § 3). Частоты $\langle \omega \rangle$ и Ω заданы здесь как функции параметра ω [формулы (3.26), (3.29), (3.31)], который зависит только от μ [см. (3.25), $H^0 = \text{const}$]. В результате получаем для функции $G(P)$ в отображении (8.7):

$$\left. \begin{aligned} G(P) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \frac{L \sqrt{\omega_0}}{P} \left(\ln \frac{32}{|\omega|} - 2 \frac{\lambda-1}{\lambda} \right); \\ \omega &= \frac{v^2}{(\lambda-1)\omega_0 P^2} - \frac{2\lambda}{\lambda-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Выражение же для $(\Delta P)_m$ остается прежним (8.8) с параметром

$$\frac{1}{q} = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\lambda-1} \frac{\rho_m}{L}, \quad (8.11)$$

где $2L$ — расстояние между соседними пробками [см. (3.18) и (7.19)].

В случае встречных пробок используем для поля асимптотическое выражение (3.36), соответствующее большим амплитудам продольных колебаний, так

как мы по-прежнему считаем β_0 малым. В этом случае частоты даются соотношениями (3.38), и мы получаем

$$G(P) \approx \frac{2}{3} \frac{r_0 v^3}{\omega_0 P^4}. \quad (8.12)$$

Величина же $(\Delta P)_m$ определяется выражением (7.34).

Полученные в этом параграфе отображения можно прямо использовать для численного моделирования длительного движения частицы в магнитной ловушке соответствующей конфигурации. Эти отображения довольно простые, и каждая итерация отображения соответствует одному полному пролету частицы через ловушку между точками отражения в пробках.

Для аналитического исследования полученные отображения можно еще более упростить и «стандартизовать».

§ 9. Стандартное отображение

Полученное в предыдущем параграфе отображение (8.7) эквивалентно гамильтониану (6.9) в том смысле, что описывает ту же систему нелинейных резонансов. Условие резонанса (первого приближения — см. ниже, § 10) для отображения можно записать в виде

$$G(P_r) = 2\pi r, \quad (9.1)$$

где r — любое целое число. Это условие определяет резонансные значения $P = P_r$ и соответственно $\mu = \mu_r = P_r^2$, для которых последовательные значения фазы θ_0 остаются неизменными. Последнее справедливо, разумеется, если μ тоже остается неизменным, т. е. если $\theta_0 = 0$ или π . Легко видеть, что одно из этих значений фазы неустойчиво в зависимости от знака $(\Delta P)_m$ [при $(\Delta P)_m > 0$, например, неустойчивой является точка $\theta_0 = 0$].

Так как $G(P) = \pi \langle \omega \rangle / \Omega$ (см. § 8), то условие резонанса можно записать также в виде: $\langle \omega \rangle = 2r\Omega$. Оно отличается от общего условия (6.2) множителем 2, который связан с симметрией движения, описываемого отображением (8.7), относительно минимума поля. В этом случае амплитуды всех нечетных гармоник продольных колебаний в фурье-разложении (6.1) обращаются в нуль.

Линеаризуем функцию $G(P)$ вблизи одного из резонансных значений P и введем новую переменную p :

$$G(P) \approx G(P_r) + \frac{dG}{dP} \Big|_{P=P_r} (P - P_r) \rightarrow G'_r (P - P_r) \equiv p. \quad (9.2)$$

Здесь $G'_r \equiv (dG/dP)_{P=P_r}$, и мы отбросили член $G(P_r) = 2\pi r$, который не изменяет отображение. В переменных p, θ (мы опустили индекс нуля у фазы) отображение (8.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + K \sin \theta; \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{p} = \theta + p + K \sin \theta. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Подобным способом оно было введено в [8] и получило название стандартного отображения, так как к нему сводятся многие (хотя, конечно, далеко не все) конкретные задачи нелинейной динамики гамильтоновых систем. В част-

ности, к этому отображению приводятся все типы магнитных ловушек, рассмотренных в предыдущем параграфе. Специфика конкретной системы входит только в единственный параметр стандартного отображения, который можно представить в виде

$$K = G'_r (\Delta P)_m. \quad (9.4)$$

Заметим, что если бы даже величина $(\Delta P)_m$ зависела от P , ее нужно было бы взять в соотношении (9.4) при $P = P_r$ (как и G'). Следовательно, K есть просто постоянная, а стандартное отображение автоматически оказывается каноническим. Поэтому для аналитического исследования исходного отображения (8.7) с помощью перехода к стандартному отображению каноничность первого не является существенной.

Резонансы первого приближения для стандартного отображения определяются условиями

$$p = p_r = 2\pi r, \quad (9.5)$$

т. е. их бесконечно много, и все они расположены на одинаковом расстоянии $\delta p = 2\pi$ друг от друга. Из сравнения последнего выражения с (9.1) видно, что стандартное отображение описывает исходную систему (в частности, ее резонансную структуру) локально по P (и по μ). Действительно, исходная система — частица в ловушке и описывающее ее движения отображение (8.7) имеет, вообще говоря, конечное число резонансов (из-за ограниченного диапазона изменения $\mu \leq v^2/2\omega_0$), и расположены они неравномерно по μ (или P). Стандартное отображение трансформирует данный участок резонансной структуры, делая его однородным и бесконечным. По этой причине стандартное отображение называют также однородной моделью резонансной структуры.

Для того чтобы локальная модель имела смысл, необходимо, чтобы резонансов было много, а их характеристики, и в частности параметр K , мало отличались от соседних резонансов. Это же есть и условие допустимости линеаризации отображения (8.7) по P . Его можно записать в виде

$$\frac{\delta P}{P} \approx \frac{2\pi}{|PG'|} \sim \frac{2\pi}{|G|} \sim \varepsilon \ll 1, \quad (9.6)$$

где $\delta P = |P_{r+1} - P_r|$ — расстояние между соседними резонансами по P .

§ 10. Граница глобальной устойчивости

Как уже отмечалось выше, центральным в проблеме длительного удержания частицы в магнитной ловушке является вопрос, накапливаются или не накапливаются последовательные резонансные изменения магнитного момента частицы $\Delta\mu$? На языке стандартного отображения этот же вопрос звучит так: является ли движение этой системы финитным, ограниченным по p , или инфинитным?

Единственный параметр стандартного отображения K имеет смысл параметра возмущения. Действительно, при $K=0$ значение $p = \text{const}$, а следовательно, и $\mu = \text{const}$. Поскольку в данном случае речь идет об адиабатическом возмущении, то величину K можно рассматривать как новый параметр адиабатичности. Точнее, в

качестве безразмерного параметра адиабатичности следует взять $|K|/(2\pi)^2$ — квадрат отношения частоты колебаний под действием возмущения $[\sim V\sqrt{|K|}]$, см. ниже, (10.2)] к частоте возмущения (равно 2π , период возмущения равен 1). Новый параметр связан со старым (ε) оценкой

$$k = \frac{|K|}{4\pi^2} \sim \frac{\varepsilon^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (10.1)$$

Здесь экспоненциальный множитель появляется из выражения для $(\Delta P)_m$ (или $\Delta\mu$), а предэкспоненциальный — из $G_r' \sim G/P \sim 1/\varepsilon P$. По понятным причинам мы будем называть величину k резонансным параметром адиабатичности.

Поскольку функция $k(\varepsilon)$ имеет особенность при $\varepsilon=0$, новый параметр k не может быть получен, как мы убедились в этом и непосредственно, из асимптотического разложения по ε . Однако, коль скоро мы нашли его точным интегрированием возмущения и пришли, таким образом, в конце концов к стандартному отображению, можно использовать теперь для анализа этого отображения асимптотическое разложение по параметру k , и в частности очень простой метод усреднения (см., например, [12]). Так, для достаточно малого $k \rightarrow 0$ и нерезонансного $p \neq 2\pi r$ можно ожидать, что вариации p будут квазипериодическими и ограниченными. Точно так же для $k \rightarrow 0$ и резонансного p (например, $p \approx 0$) можно пренебречь всеми резонансами, кроме данного ($r=0$). При этом разностные уравнения стандартного отображения (9.3) можно заменить дифференциальными:

$$\bar{p} - p \approx \frac{dp}{dt} \approx K \sin \theta; \quad \bar{\theta} - \theta \approx \frac{d\theta}{dt} = p, \quad (10.2)$$

которые оказываются каноническими с гамильтонианом

$$H_r(\theta, p) = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta. \quad (10.3)$$

Здесь время t измеряется в числе итераций отображения, или в единицах $T/2$.

Резонансный гамильтониан (10.3) эквивалентен гамильтониану (6.8) — оба описывают один нелинейный резонанс. Как уже отмечалось в § 6, движение в этом случае является финитным для любых начальных условий. Максимальная амплитуда колебаний p соответствует движению вблизи сепаратрисы ($H_r = |K|$). Сепаратриса имеет две ветви:

$$p_c = \pm 2\sqrt{|K|} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.4)$$

Это выражение справедливо при $K > 0$; изменение знака K эквивалентно сдвигу фазы θ на π : $\theta \rightarrow \theta + \pi$ [см. (10.3)]. Максимальное изменение $(\Delta p)_m$ величины p равно ширине сепаратрисы, т. е. наибольшему расстоянию между ветвями сепаратрисы (при $\theta = \pi$):

$$(\Delta p)_m = 4\sqrt{|K|} = 8\pi\sqrt{k}. \quad (10.5)$$

Динамика одного нелинейного резонанса (10.3) полностью аналогична движению обыкновенного маятника или же частицы в поле с гармоническим потенциалом, в частности в многопробочной ловушке типа (3.19). Картина фазовых траекторий во всех этих случаях имеет вид, схематически изображенный на рис. 1. Следовательно, как уже отмечалось выше, в § 6, колебания p , а значит и μ , в случае одного резонанса ограничены. До каких K сохраняется эта простая картина движения? Обычное условие асимптотической теории требует, чтобы частота ($\sim |K|^{1/2}$) усредненной (сглаженной) системы (10.2) была много меньше частоты отброшенного возмущения в исходной системе (9.3), которая равна 2π (за единицу времени принята одна итерация), т.е. чтобы $|K| \ll (2\pi)^2$, или $k \ll 1$ (10.1). Отсюда критическое значение возмущения

$$k_{кр} \sim 1; \quad |K|_{кр} \sim (2\pi)^2 \approx 40. \quad (10.6)$$

Значительно лучшую оценку можно получить с помощью так называемого критерия перекрытия нелинейных резонансов [8]. Простейший вариант этого критерия в рассматриваемом случае получается следующим образом. Все целые $[p_r/2\pi = r]$ резонансы стандартного отображения идентичны и описываются одним и тем же гамильтонианом (10.3) со сдвинутым импульсом $p \rightarrow p - j_r$. В частности, каждый из них имеет одну и ту же ширину (10.5). Простейший критерий перекрытия резонансов определяется из условия касания сепаратрис соседних резонансов. Поскольку расстояние между ними $\delta p = 2\pi$ (9.5), то условие касания имеет вид $\delta p = (\Delta p)_m$, откуда

$$k_{кр} = 1/16; \quad |K|_{кр} = \pi^2/4 \approx 2,5. \quad (10.7)$$

Это уже значительно ближе к результатам численного моделирования стандартного отображения [8], которые дают

$$|K|_{кр} \approx 1; \quad k_{кр} \approx 1/40 \quad (10.8)$$

с точностью порядка нескольких процентов. Отметим, что на границе устойчивости параметр адиабатичности $k = k_{кр} \ll 1$, что оправдывает применение асимптотического разложения в этой области.

Таким образом, весьма простой критерий перекрытия позволяет правильно оценить порядок критического возмущения. Более того, картина перекрытия резонансов достаточно наглядна, чтобы составить качественно представление о том, что произойдет при большем возмущении. Ясно, что при перекрытии резонансов траектория системы может переходить из области одного резонанса в область соседнего и, по крайней мере для некоторых начальных условий, движение станет инфинитным. Характер этого движения будет рассмотрен ниже (см. § 11). Здесь же отметим, что завышение критического значения по простому критерию перекрытия резонансов объясняется в основном тем, что в таком виде критерий учитывает только резонансы первого приближения по параметру адиабатичности k . Во втором приближении по этому параметру появляются полуцелые резонансы $p_r/2\pi = r/2$; в третьем приближе-

нии — резонансы $p_r/2\pi = r/3$ и т. д. Полная система резонансов оказывается всюду плотной по p :

$$p_{rq} = 2\pi r/q, \quad (10.9)$$

где r, q — любые целые. Это, конечно, не означает, что резонансы всегда (при любом $k \rightarrow 0$) перекрываются, так как ширина резонансов быстро падает с ростом знаменателя q . Действительно, резонансы со знаменателем q появляются лишь в q -м (и высших) приближениях, т. е. в членах возмущения, амплитуда которых порядка k^q , а ширина резонанса $\sim kq/2$. Учитывая, что число q -резонансов на заданном интервале p (например, 2π — между соседними целыми резонансами) пропорционально q , получаем, что перекрытие резонансов всех приближений оценивается суммой

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} q\eta^q = \eta \frac{d}{d\eta} \sum_{q=1}^{\infty} \eta^q = \frac{\eta}{(1-\eta)^2} = \frac{1}{4}. \quad (10.10)$$

Здесь $\eta = \sqrt{k}$, а условие перекрытия $S = 1/4$ получается из критического значения $\eta_1 = 1/4$ (10.7) при учете только целых резонансов. Резонансы высших приближений увеличивают S (при заданном η) и соответственно уменьшают $\eta_{кр}$ до

$$\eta_{кр} = 3 - \sqrt{8} \approx 0,17; \quad k_{кр} \approx \frac{1}{34}; \quad |K|_{кр} \approx 1,16. \quad (10.11)$$

Это уже совсем близко к значению границы устойчивости (10.8), хотя оценка (10.10) не может, конечно, считаться априори надежной, поскольку члены суммы в (10.10) содержат неизвестные числовые коэффициенты. По данным [8] коэффициенты при второй и третьей степенях η равны $\pi/2 \approx 1,57$ и $(2,2)^2$ соответственно. Во всяком случае выражение (10.10) демонстрирует, что всюду плотная система резонансов совсем не обязательно ведет к перекрытию и неустойчивости.

Этот важный в принципиальном и практическом отношении вывод не может все же считаться достаточно убедительным, так как он основан в конечном счете на асимптотическом разложении по параметру k . Значение результатов численного моделирования также ограничено ввиду конечного времени счета (до $\sim 10^7$ итераций стандартного отображения). Строгий результат о существовании конечного критического возмущения, ниже которого частица оказывается вечно (т. е. для $-\infty < t < \infty$) запертой в магнитной ловушке, был получен в работе [10] с помощью построения сходящихся (а не асимптотических) рядов теории возмущения. К сожалению, технические трудности не позволяют получать таким путем эффективную оценку величины (и даже порядка) критического возмущения. В работе [8] с учетом второго и третьего приближений теории возмущения, а также некоторых эффектов высших приближений получено значение $|K|_{кр} \approx 1,1$. Совершенно другой метод [23] приводит к $|K|_{кр} \approx 0,97$ (обсуждение последнего метода см. в [24]). Подводя итоги, можно заключить, что значения (10.8) для крити-

ческого возмущения являются достаточно надежными и их можно использовать при решении конкретных задач нелинейной динамики, приводимых к стандартному отображению.

Ограниченные колебания действия μ для подкритического возмущения называют иногда суперadiaбатичностью (см. [25], где решена близкая задача). По существу, в этом случае адиабатический инвариант становится точным интегралом движения, хотя и неаналитическим и даже сингулярным по динамическим переменным и исходному малому параметру ε [10]. В этой связи следует заметить, что знаменитая теорема Пуанкаре об отсутствии у гамильтоновой системы в общем случае аналитических интегралов движения, кроме энергии, имеет не столь большое значение, как это считалось ранее.

Возникновение неустойчивости движения при перекрытии резонансов можно рассматривать как эффект взаимодействия резонансов, т. е. совместного действия нескольких резонансов, результат которого отличается (в данном случае кардинально) от суммы действий отдельных резонансов. Можно было бы описать эту ситуацию и как интерференцию резонансов, интерференцию с катастрофическими последствиями. Во всяком случае эффект перекрытия резонансов дает яркий пример глубокого различия линейной и нелинейной механики.

Поскольку стандартное отображение описывает исходную систему локально, критическое значение параметра K определяет границу устойчивости в фазовом пространстве системы. Выразим положение этой границы через параметры исходной системы.

Для модели (3.1) параметр стандартного отображения [см. (7.8), (8.3), (9.4)]:

$$K \approx \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{3}{\sin^3 \beta_0} + \frac{1}{\sin \beta_0} \right) \frac{\exp \left[-\frac{4}{3v_0 \cos \beta_0} \right]}{v_0} \approx \frac{3\pi^2}{2} \frac{\exp \left(-\frac{4}{3v_0} \right)}{v_0 \beta_0^3}; \quad \beta_0 \ll 1. \quad (10.12)$$

Критическое значение $|K|=1$ (10.8) определяет границу устойчивости на плоскости динамических переменных β_0 и $v_0 = \sqrt{2H^0}$, которая является двумерной проекцией четырехмерного фазового пространства рассматриваемой модели.

Эту границу можно представить также в виде

$$\beta_0^{\text{кр}} \approx 2,5v_0^{-1/3} \exp(-4/9v_0). \quad (10.13)$$

На плоскости скоростей (\dot{x}_0, \dot{y}_0) величина $\beta_0^{\text{кр}}$ определяет сектор неустойчивого движения $\beta_0 < \beta_0^{\text{кр}}$, в котором амплитуда продольных колебаний неограниченно возрастает. Адиабатический режим соответствует здесь малым $v_0 \ll 1$, так как отноше-

ние частот $\omega_x / \langle \omega_y \rangle \sim v_0 \beta_0^3 \sim \exp(-4/3 v_0)$ [последняя оценка справедлива на границе устойчивости (10.13)].

Для короткой магнитной ловушки, используя соотношения (8.8) и (8.9), получаем аналогично предыдущему случаю

$$K \approx \frac{81\pi^2}{64} \frac{r_0}{L} \frac{q^2 e^{-q}}{\beta_0^4}, \quad (10.14)$$

где $q = 2L/3\rho_m \gg 1$ и $\beta_0 \ll 1$. Отсюда критический угол

$$\beta_0^{(кр)} \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{r_0}{L}\right)^{1/4} \sqrt{q} e^{-q/4}. \quad (10.15)$$

В ловушке он определяет конус неустойчивости в пространстве скоростей частицы в минимуме магнитного поля. В принятой модели короткой ловушки (3.10) поле растет вдоль магнитной линии неограниченно, и конус неустойчивости существует при любом $q \rightarrow \infty$, хотя его ширина и уменьшается очень быстро при увеличении q . В реальных ловушках поле ограничено некоторым максимальным значением $\omega_m = \lambda\omega_0$, где λ — пробочное отношение. Поэтому, как известно, существует адиабатический конус выхода частиц $\beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2}$ (при $\lambda \gg 1$), даже если $\mu = \text{const}$. Неустойчивость движения частиц в магнитной ловушке существенна, только если $\beta_0^{(кр)} > \beta_0^{(a)}$, или

$$\lambda > \frac{8}{9\pi} \left(\frac{L}{r_0}\right)^{1/2} \frac{e^{q/2}}{q}. \quad (10.16)$$

Этой оценке можно придать и другой смысл — как ограничение сверху на амплитуду устойчивых продольных колебаний ($a < a_{кр}$). Действительно, минимальное устойчивое $\beta_0^{кр}$ ($\ll 1$) соответствует достижению частицей поля $\omega_{кр} \approx \omega_0 \lambda_{кр} \approx \omega_0 (\beta_0^{(кр)})^{-2}$. Следовательно, $\lambda_{кр} = 1 + a_{кр}^2/L^2$ (для нашей модели короткой ловушки) и равно правой части неравенства (10.16).

Совершенно аналогично получается оценка границы устойчивости и для встречных пробок (в плоской геометрии). Из (8.12) и (7.34) получаем с помощью (9.4):

$$K \approx -\frac{64\sqrt{2}}{3} \frac{q^{9/8} e^{-q}}{\beta_0^5}. \quad (10.17)$$

Здесь $q = r_0\omega_0/2v = r_0/2\rho_m$ и $\beta_0 \ll 1$. Ширина неустойчивого сектора

$$\beta_0^{(кр)} \approx 2q^{9/40} e^{-q/5},$$

$$\lambda_{кр} \approx \frac{e^{0,4q}}{4q^{9/20}} \approx \frac{|s|_{кр}}{r_0} \approx \frac{x_{макс}}{r_0} \approx \frac{y_{макс}}{r_0}, \quad (10.18)$$

где $x_{макс} = y_{макс} \approx |s|_{макс} \gg r_0$ — максимальное отклонение частицы вдоль координатных осей (см. рис. 2, а), при котором ее колебания еще устойчивы.

Положение границы устойчивости на плоскости (x, y) сечения магнитного поля можно получить следующим образом. Так как $\omega_0(r_0) = Cr_0$, где C — некоторая постоянная (см. § 3, п. 5), то

$$\frac{r_0 v}{\omega_0} = r_0 \rho_m = \frac{v}{C} = L^2 = \text{const}; \quad q = \frac{r_0 \omega_0}{2v} = \frac{r_0^2}{2L^2} \quad (10.19)$$

и длина L есть некоторый физический параметр данной ловушки. Подставляя эти выражения во второе соотношение (10.18) и используя уравнение магнитной линии $2xy = r_0^2$, получаем уравнение границы устойчивости в виде

$$y_b \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} q^{1/20} e^{0,4q} \approx \frac{e^{0,4x_b y_b}}{2\sqrt{2}}$$

или

$$y_b \approx \frac{5}{2} \frac{1 + \ln x_b}{x_b}. \quad (10.20)$$

Здесь x_b и y_b измеряются в единицах L . Это выражение справедливо только при $x_b \gg 1$, так как в (10.18) использовалась асимптотика поля (3.36). Кривая (10.20), симметризованная относительно прямой $x=y$, показана на рис. 5 (нижняя кривая со штриховкой) вместе с одной из магнитных линий, которые она пересекает. Формально кривая (10.20) пересекает линию $x=y$ в точке $x_b = y_b \approx 2,08$, где $r_0^{\text{мин}} = 2,9$ и $q^{\text{мин}} \approx 4,3$. Неустойчивая область расположена под кривой.

В многопробочной ловушке мы явно учитываем адиабатический

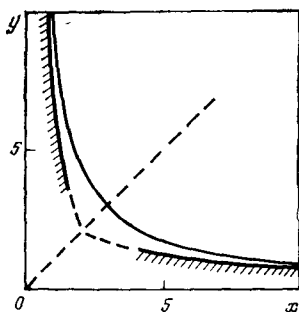


Рис. 5. Граница устойчивости движения (нижняя кривая со штриховкой) для плоской геометрии встречных пробок; область неустойчивости лежит под этой кривой. Верхняя кривая — одна из магнитных линий. Единица длины определяется условием $r_0 \rho_m(r_0) = 1$ (см. текст)

конус потерь с раствором $\beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2} \ll 1$. Поэтому область неустойчивого движения будет иметь вид конического слоя, примыкающего к конусу потерь. Будем характеризовать этот слой его шириной, считая ее малой (см. ниже):

$$\Delta\beta_0 = \beta_0^{\text{кр}} - \beta_0^{(a)} \ll \beta_0^{(a)} \ll 1. \quad (10.21)$$

Основной параметр функции $G(P)$ (8.10) равен при этом:

$$\omega \approx -4\sqrt{\lambda} \Delta\beta_0. \quad (10.22)$$

Так как $|\omega| \ll 1$, то в выражении для $G'(P)$ достаточно дифференцировать только ω :

$$G' \approx -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{L\lambda\omega_0^{3/2}}{\Delta\beta_0 v^2}. \quad (10.23)$$

Используя для $(\Delta P)_m$ соотношение (8.8) с параметром q из (8.11), получаем

$$K \approx \frac{27\pi^2}{64} \frac{r_0}{L} \frac{\lambda^2}{\Delta\beta_0} q^2 e^{-q}. \quad (10.24)$$

Отсюда ширина слоя неустойчивого движения

$$|\Delta\beta_0| \approx 4,2 \frac{r_0}{L} (\lambda q)^2 e^{-q}. \quad (10.25)$$

В многопробочной ловушке слой состоит из двух половин, каждая шириной $|\Delta\beta_0|$: «верхней», в которой частицы являются пролетными ($\omega > 0$; $\Delta\beta_0 < 0$), и «нижней» с запертыми частицами ($\omega < 0$; $\Delta\beta_0 > 0$).

Подобный слой образуется, конечно, и в любой другой реальной ловушке за счет максимума поля в пробках. Моделью такой «реальной» ловушки может служить одна секция многопробочной ловушки (две пробки). В этом случае верхняя половина слоя не играет роли, так как частица, оказавшаяся здесь, покидает ловушку за один пролет. В нижней же половине слоя частица может держаться довольно долго (см. § 11), так что существование слоя вполне наблюдаемо. Конечно, для длительного удержания частиц в ловушке наличие этого слоя совершенно несущественно, так как он практически не увеличивает адиабатический конус потерь.

§ 11. Локальная диффузия

Рассмотрим характер движения в неустойчивой области, определяемой условием $|K| > 1$ (см. § 10). Будем исходить из стандартного отображения (9.3), которое описывает движение частицы при относительно небольших изменениях μ . Характерной особенностью динамики стандартного отображения является локальная неустойчивость движения, т. е. быстрое «разбегание» почти всех очень близких траекторий. Эту неустойчивость не следует путать с глобальной неустойчивостью, рассмотренной в § 10, которая означает просто инфинитность движения, т. е. неограниченное изменение p за достаточно длительное время. Для исследования поведения близких траекторий стандартного отображения рассмотрим производную [см. (9.3)]:

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\theta} = 1 + K \cos \theta \approx K \cos \theta. \quad (11.1)$$

Последнее выражение справедливо при $|K| \gg 1$, т. е. глубоко в области глобальной неустойчивости. Точно такое же выражение получается и для производной ($d\bar{p}/dp$), если учесть, что фаза θ в первом уравнении (9.3) связана с предыдущим значением $\bar{\theta}$ соотношением: $\theta = \bar{\theta} + p$. Отсюда ясно, что среднее расстояние между очень близкими траекториями (в линейном приближении) будет увеличиваться экспоненциально со временем:

$$|\delta\theta(t)| \approx |\delta\theta|_0 e^{-ht}, \quad (11.2)$$

где средняя скорость локальной неустойчивости h равна (на одну итерацию):

$$h = \langle \ln |K \cos \theta| \rangle = \ln \frac{|K|}{2}. \quad (11.3)$$

Последнее выражение получается простым усреднением по θ в предположении равномерного распределения. Это упрощающее предположение действительно хорошо выполняется при достаточно

больших $|K|$ (см. [8]). При меньших K (даже в области глобальной неустойчивости, т. е. при $|K| > 1$) на фазовом цилиндре стандартного отображения сохраняются значительные области устойчивого движения, т. е. ограниченных квазипериодических колебаний p (рис. 6). Самые крупные области окружают устойчивые периодические траектории стандартного отображения с периодом 1 (неподвижные точки): $p_1/2\pi = r$; $\theta_1 = \pi$ (r — любое целое; $K > 0$). Эти точки соответствуют центрам целых резонансов. Элементарный анализ линейной устойчивости этих точек (см., например, [8]) показывает, что устойчивые области вокруг них сохраняются до $K=4$. При больших K также возможно существование некоторых других устойчи-

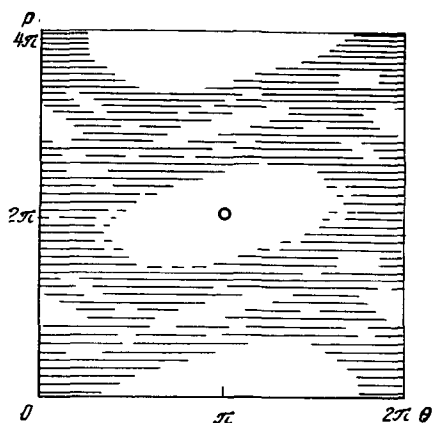


Рис. 6. Участок развернутого фазового цилиндра стандартного отображения (9.3) при $K=1,13$ (по данным [8]). Область инфинитного движения по p (стохастическая компонента) заштрихована. Кружком отмечена устойчивая неподвижная точка в центре одного из целых резонансов $p_r = 2\pi$

вых областей, однако их площадь мала, и мы будем ими пренебрегать. Более подробно этот вопрос исследован в [8] (при $K=5$, например, относительная площадь устойчивых областей составляет меньше 2%). В соответствии с этим численное моделирование стандартного отображения показывает [8], что последнее выражение (11.3) для h справедливо с погрешностью не больше 5% для $K > 6$.

Величина h играет первостепенную роль в современной теории динамических систем и называется метрической энтропией (см., например, [26]) или, иногда, КС-энтропией (энтропией Крылова — Колмогорова — Синая) [8]. Оказывается, что при $h > 0$, т. е. при экспоненциальном развитии локальной неустойчивости, почти все траектории динамической системы, точнее, эргодической (стохастической) компоненты движения, являются случайными [27]. В рассматриваемом случае при $K > 1$ стохастическая компонента совпадает с областью глобальной неустойчивости.

Сколько-нибудь подробное обсуждение чрезвычайно интересно го вопроса о физическом смысле такой динамической случайности, т. е. случайного движения полностью детерминированной динамической системы, выходит за рамки данной статьи. Ограничимся лишь краткими замечаниями, отсылая интересующихся читателей к оригинальным работам [27] (краткое популярное обсуждение этих вопросов см. также в [28]).

В современной теории динамических систем случайность траектории связывается с ее максимальной сложностью. Последняя означает, грубо говоря, что не существует другого (более простого) способа описать данную случайную траекторию, чем просто задать ее саму. Иными словами, уравнения движения оказываются совершенно бесполезными для вычисления траектории на достаточно большом интервале времени, поскольку вся сложность траектории заключена в ее начальных условиях. Нетрудно видеть, что это прямо связано с экспоненциальной локальной неустойчивостью движения, благодаря которой траектория определяется с течением времени сколь угодно мелкими деталями начальных условий. Нетривиальным здесь является строгий результат, что почти все начальные условия движения соответствуют при этом именно случайным траекториям. Динамическая случайность, таким образом, связана в конечном счете с непрерывностью фазового пространства, роль же динамической системы (уравнений движения) сводится лишь к обеспечению локальной неустойчивости движения, которая вскрывает микроскопическую структуру фазового пространства [28].

В рамках рассматриваемой задачи о движении частицы в магнитной ловушке существенно, что сильная локальная неустойчивость приводит к невозможности представления движения в терминах траекторий и заставляет перейти к статистическому описанию. Основой статистического описания является эргодичность движения во всем фазовом пространстве или в его части. В последнем случае говорят об эргодической компоненте движения. Достаточным, хотя и не необходимым, условием эргодичности движения является описанная выше локальная неустойчивость. Среднее время пребывания эргодической траектории в любой области фазового пространства пропорционально инвариантной мере этой области. Для гамильтоновых (канонических) динамических систем такой инвариантной (т. е. сохраняющейся в процессе движения) мерой является, как известно, фазовый объем (теорема Лиувилля). Это позволяет дать количественное определение вероятности состояния, точнее, области состояний, динамической системы как величины, пропорциональной фазовому объему этой области (коэффициент пропорциональности зависит от принятой нормировки). В этом — одно из преимуществ канонических (гамильтоновых) уравнений движения или отображений. Для стандартного отображения, например, плотность вероятности $d\omega = dpd\theta$.

Все прочие статистические свойства динамической системы существенно зависят от поведения корреляций. Рассмотрим, напри-

мер, корреляции фазы θ в стандартном отображении, точнее, рассмотрим корреляционную функцию

$$C(\tau) = \langle \sin \theta(t) \sin \theta(t + \tau) \rangle, \quad (11.4)$$

где усреднение производится либо по t на одной почти любой (случайной) траектории, либо, в силу эргодичности движения, прямо по θ . При $h > 0$ все корреляции необратимо затухают, т. е. $C(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, хотя и не обязательно экспоненциально (см. ниже).

Если это затухание достаточно быстрое, то возможно простое диффузионное описание движения. Действительно, из первого уравнения (9.3) можем написать:

$$(\Delta p)_t = K \sum_{t'=1}^t \sin \theta(t'),$$

где время t — целое (номер итерации), а $(\Delta p)_t$ — изменение p за t итераций. В пренебрежении устойчивой компонентой движения (см. выше) из эргодичности следует, что $\langle \sin \theta \rangle = 0$, а значит, и

$$\langle (\Delta p)_t \rangle = 0. \quad (11.5)$$

Найдем $\langle (\Delta p)^2_t \rangle$. Имеем:

$$\langle (\Delta p)^2_t \rangle = K^2 \sum_{t'=1}^t \sum_{t''=1}^t \langle \sin \theta(t') \sin \theta(t'') \rangle.$$

Учитывая, что $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1/2$, последнее выражение можно представить при $t \rightarrow \infty$ в виде

$$\langle (\Delta p)^2_t \rangle \rightarrow tK^2 \left[\frac{1}{2} + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} C(\tau) \right]. \quad (11.6)$$

Если последняя сумма конечна, то мы имеем простой статистический процесс диффузии по p со скоростью

$$D_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta p)^2_t \rangle}{2t} = \frac{K^2}{4} R(K), \quad (11.7)$$

где $R(K)$ — корреляционный фактор, который может зависеть только от K — единственного параметра стандартного отображения, полностью определяющего все его динамические и статистические свойства. При $K \rightarrow \infty$ КС-энтропия $h \rightarrow \infty$ и корреляции исчезают даже для соседних значений фазы θ . В этом пределе $R \rightarrow 1$, и мы получаем

$$D_p^\infty = K^2/4. \quad (11.8)$$

Так как для стандартного отображения $K = \text{const}$, диффузионное уравнение для функции распределения $f(p, t)$ имеет простой вид

$$\partial f / \partial t = D_p \partial^2 f / \partial p^2. \quad (11.9)$$

Его частным решением, соответствующим начальным условиям $f(p, 0) = \delta(p)$, является распределение Гаусса:

$$f(p, t) = \frac{\exp\left(-\frac{p^2}{4D_p t}\right)}{\sqrt{4\pi D_p t}}. \quad (11.10)$$

Численное моделирование хорошо подтверждает эти простые соотношения [8].

Отметим, что для применимости любого кинетического уравнения вообще и простого диффузионного уравнения (11.9) в частности необходимо, чтобы диффузионный масштаб времени $T_D \sim \sim p^2/D_p$, т. е. характерное время эволюции функции распределения f , был бы много больше динамического масштаба $T_h \approx 1/h$, т. е. времени затухания корреляций [29]. Это необходимо потому, что величина D_p является одновременно и локальным (по времени) параметром диффузионного уравнения, т. е. в масштабе T_D , и асимптотическим — в масштабе T_h (11.7)*. Для стандартного отображения

$$\frac{T_D}{T_h} \sim \left(\frac{p}{K}\right)^2 / \ln K \sim \left(\frac{p}{K}\right)^2 \gg 1.$$

Вернемся теперь от стандартного отображения к отображению вида (8.7), которое более точно описывает исходную задачу. Поскольку в последнее входит та же фаза, то корреляционные свойства движения останутся прежними, и мы можем сразу написать скорость диффузии по P :

$$D_P = \frac{(\Delta P)_m^2}{4} R(K) \quad (11.11)$$

с тем же корреляционным фактором $R(K)$ (11.7). Последнее выражение получается, конечно, и из общего соотношения

$$D_P = D_p \left(\frac{dP}{dp}\right)^2, \quad (11.12)$$

поскольку $K = G'_r (\Delta P)_m^2$ и $dP/dp = 1/G'_r$. В частности, скорость диффузии по μ , которая нам как раз и нужна, равна

$$D_\mu = \mu (\Delta P)_m^2 R(K), \quad (11.13)$$

где $(\Delta P)_m$ зависит от вида магнитной ловушки (см. § 8).

Запишем, наконец, скорость диффузии в обычном, непрерывном времени (а не в числе итераций отображения). Очевидно, что для этого достаточно разделить полученные выше выражения на $T/2 = \pi/\Omega$. Например:

$$D_\mu = \frac{\Omega\mu}{\pi} (\Delta P)_m^2 R(K). \quad (11.14)$$

* Если упустить из виду это важное физическое условие, легко прийти к противоречию (см. [30—32] и ниже).

В отличие от стандартного отображения, однако, величины D теперь уже недостаточно, для того чтобы составить диффузионное уравнение для функции распределения $f(\mu, t)$. Это связано с тем, что уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), которое описывает диффузионный процесс при малых изменениях диффундирующей величины ($|\Delta\mu| \ll \mu$ в нашем случае), содержит кроме D_μ еще и вторую функцию

$$U_\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta\mu)_t \rangle}{t}, \quad (11.15)$$

так называемый «снос». Эту величину называют также иногда «трением», однако в общем случае это не оправдано, скорее, ее можно назвать средней скоростью (по μ).

С помощью величин U_μ и D_μ уравнение ФПК можно записать в виде (см., например, [33]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= - \frac{\partial Q}{\partial \mu}; \\ Q &= - \frac{\partial}{\partial \mu} (D_\mu f) + U_\mu f, \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

где Q — поток вероятности. В общем случае $U_\mu \neq 0$. Рассмотрим, например, отображение (8.7). Как было выяснено в § 8, оно является каноническим именно в переменных P, θ_0 , а не μ, θ_0 , т. е. стохастическая траектория при $|K| \gg 1$ равномерно распределена именно на поверхности P, θ_0 . Так как $\mu = P^2$, то $\Delta\mu = 2P\Delta P + (\Delta P)^2$. Отсюда

$$U_\mu = \frac{\langle (\Delta\mu)_t \rangle}{t} = \frac{\langle (\Delta P)_t^2 \rangle}{t} = 2D_P. \quad (11.17)$$

Сравнивая это выражение со скоростью диффузии D_μ (11.13), приходим к соотношению ($R \approx 1$):

$$U_\mu = \frac{1}{2} \frac{dD_\mu}{d\mu}, \quad (11.18)$$

которое и решает задачу нахождения функции U_μ , а вместе с ней и полного диффузионного уравнения ФПК для отображения (8.7). Однако возникает вопрос, с какой точностью это отображение описывает исходную задачу о движении частицы в ловушке? Оно безусловно справедливо в первом порядке теории возмущения по параметру адиабатичности $k \sim (\Delta P)_m$ (10.1). Но $\mu U_\mu \sim D_\mu \sim (\Delta P)_m^2 \sim k^2$, т. е. скорость U_μ оказывается величиной второго порядка малости. Как мы увидим ниже (см. § 13), отображение (8.7) не обеспечивает такой точности, и поэтому соотношение (11.18) оказывается неправильным.

Общий метод нахождения U_μ будет рассмотрен в § 13, а сейчас мы покажем, что для начальной стадии диффузии скорость U_μ вообще не играет роли и ею можно просто пренебречь. В самом

деле, изменение μ складывается из двух частей: во-первых, собственно диффузии, или разброса $(\delta\mu)_1 \sim \sqrt{D_\mu t}$, и, во-вторых, из среднего смещения $(\delta\mu)_2 \sim U_\mu t$. Их отношение [см. (11.18)]

$$\frac{(\delta\mu)_1}{(\delta\mu)_2} \sim \frac{\sqrt{D_\mu t}}{U_\mu t} \sim \frac{\mu}{(\delta\mu)_1} \gg 1 \quad (11.19)$$

пока $(\delta\mu)_1 \ll \mu$, т. е. пока диффузия носит локальный характер.

В качестве примера рассмотрим диффузию в тонком стохастическом слое многопробочной ловушки. В выражении для скорости диффузии (11.13) (дискретное t) примем для простоты $R(K) \approx 1$. А так как в узком слое $\mu \approx \mu_a$ (значение μ на адиабатическом конусе потерь), то коэффициент диффузии $D_\mu \approx \text{const}$, и мы приходим к простому диффузионному уравнению вида (11.9). Если многопробочная ловушка достаточно длинная и можно пренебречь потоком частиц вдоль ловушки, то диффузия в слое приведет просто к релаксации начального распределения $f(\mu, 0) \rightarrow \text{const}$. Для определения времени релаксации заметим, что на обеих границах слоя диффузионный поток равен нулю, т. е. $\partial f / \partial \mu = 0$. Отсюда собственные функции уравнения диффузии:

$$\left. \begin{aligned} f_n(\mu, t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \cos(\pi n \nu); \\ \nu &= (\mu - \mu_{\text{кр}}) / \Delta_\mu; \quad \tau_n = \Delta_\mu^2 / \pi^2 n^2 D_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

где $\mu_{\text{кр}}$ — одна из границ слоя, а Δ_μ — его полная ширина. Равновесное распределение соответствует $n=0$. Время релаксации определяется максимальным $\tau_n = \tau_1$. Используя выражения для D_μ (11.13) и ширины слоя (10.25) ($\Delta_\mu / \mu = 4 |\Delta\beta_0| / \beta_0^{(a)}$), получаем для времени релаксации

$$\tau_1 \approx \frac{64}{\pi^2} \left(\frac{\lambda L}{\rho_m} \right)^2 \quad (11.21)$$

итераций отображения (8.7), т. е. пролетов частицы между соседними пробками. Заметим, что следующая собственная функция $n=2$ (11.20) релаксирует в 4 раза быстрее.

Сделаем небольшое отступление. В равновесии ($t \rightarrow \infty$; $f \rightarrow \text{const}$) величина $\langle (\Delta\mu)^2 \rangle = \text{const}$. Поскольку соотношение (11.6) остается справедливым и в этом пределе, то $R(K) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ясно, что это происходит за счет появления дальних корреляций при отражении частицы от границ слоя. Отсюда, однако, вовсе не следует, что коэффициент диффузии (11.7) в уравнении (11.9) равен нулю, как иногда считают [30—32]. Это было бы слишком формальным и прямолинейным пониманием предела в (11.7). На самом деле бесконечность в этом пределе есть бесконечность в малом, т. е. в динамическом, масштабе времени $T_h \ll T_D$. Иными словами, предел $t \rightarrow \infty$ в (11.7) означает на самом деле сильное двойное неравенство: $T_h \ll t \ll T_D$.

Рассмотрим теперь одну секцию многопробочной ловушки. В этом случае частицы удерживаются только в нижней половине слоя. Поэтому при решении диффузионного уравнения в качестве второго граничного условия нужно положить $f(\mu_a, t) = 0$, т. е. условие поглощения (вылета) частиц на адиабатическом конусе. Нетрудно видеть, что первая собственная функция (11.20) удовлетворяет и этому граничному условию (при $\nu = 1/2$). Поэтому выражение (11.21) дает также и время жизни частиц в нижней половине слоя. Интересно отметить, что это время возрастает пропорционально квадрату магнитного поля, тогда как ширина слоя экспоненциально убывает с ростом поля (10.25). Отметим также, что следующая собственная функция, удовлетворяющая условию поглощения при $\mu = \mu_a$, соответствует теперь $n = 3$ и затухает в 9 раз быстрее, чем основная ($n = 1$).

§ 12. Динамические корреляции

Рассмотрим подробнее корреляционный фактор $R(K)$ в выражении для скорости диффузии в случае стандартного отображения [см. (11.7)]. Будем по-прежнему считать, что при $|K| \gg 1$ можно пренебречь устойчивой компонентой движения. Так как стандартное отображение является каноническим в переменных p, θ , то траектория будет при этом равномерно заполнять поверхность фазового цилиндра. Поскольку структура стандартного отображения периодична не только по θ , но и по p (с тем же периодом 2π), при вычислении корреляций достаточно произвести усреднение по фазовому квадрату $2\pi \times 2\pi$ (развертка участка фазового цилиндра).

Найдем несколько первых корреляций функции $\sin \theta$ для стандартного отображения. Величина $C(1)$ в (11.4) находится непосредственно из второго уравнения отображения (9.3) и равна

$$C(1) = \langle \sin \theta \sin \bar{\theta} \rangle = \langle \sin \theta \sin [\theta + K \sin \theta + p] \rangle = 0 \quad (12.1)$$

при усреднении по p (для фиксированного θ). Для того чтобы найти $C(2)$, выразим последующую ($\bar{\theta}$) и предыдущую ($\underline{\theta}$) фазы через θ, p на данном шаге:

$$\bar{\theta} = \theta + K \sin \theta + p; \quad \underline{\theta} = \theta - p.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C(2) &= \langle \sin \underline{\theta} \sin \bar{\theta} \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos (2p + K \sin \theta) \rangle - \frac{1}{2} \langle \cos (2\theta + K \sin \theta) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} J_2(|K|) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}|K|} \cos \left(|K| + \frac{15}{8|K|} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (12.2)$$

В последнем выражении использовано улучшенное асимптотическое представление для бесселевых функций при $|K| \gg 1$ [22]. Весь вывод годится, по-видимому, до $|K| \approx 4$. При меньших $|K|$ появляется значительная устойчивая область (см. выше), и простое усреднение по θ, p неприменимо.

Несколько более громоздкие вычисления дают для следующих двух корреляций:

$$\left. \begin{aligned} C(3) &= \frac{1}{2} [J_3^2(|K|) - J_1^2(|K|)] \approx -\frac{4J_1 J_2}{|K|} \sim |K|^{-2}; \\ C(4) &\approx \frac{1}{2} J_2^2(|K|) \sim |K|^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Приближенное равенство означает здесь сохранение только основного члена по малому параметру разложения $|K|^{-1/2}$. Начиная с $C(4)$ точные выражения содержат бесконечные суммы по бесселевым функциям, так что дальнейшее продвижение этим методом оказывается невозможным. Поскольку, однако, корреляции быстро затухают при $|K| \gg 1$ (см. ниже), то найденные значения $C(\tau)$ уже достаточно хорошо аппроксимируют корреляционный фактор:

$$R(K) \approx 1 - 2J_2(|K|) + 2J_2^2(|K|), \quad (12.4)$$

где мы пренебрегли вкладом $C(3)$. Определяющим здесь является второе слагаемое, которое приводит к характерным медленно затухающим колебаниям скорости диффузии с ростом K . Такие колебания наблюдались при численном моделировании стандартного отображения в [8] и в других работах (см. [34]). В последней работе была впервые вычислена поправка (12.4) к асимптотической скорости диффузии $D_p^\infty = K^2/4$. Вычисление проводилось совершенно другим методом (фактически, даже двумя разными методами), в частности, не использовалось предположение об эргодичности движения. Поэтому результат [34] можно рассматривать также как независимое доказательство эргодичности стандартного отображения при $|K| \gg 1$.

На рис. 7 численные значения фактора $R(K)$, взятые из работы [34], сравниваются с теоретической зависимостью (12.4). Последняя отличается от результата [34] (первая работа) учетом корреляции $C(4)$, что несколько улучшает согласие с численными данными. Эта поправка была вычислена в нескольких работах, в том числе и во второй работе [34], а также методом, близким к описанному выше (и тоже постулирующим эргодичность движения), в работе [35].

Таким образом, зависимость первых (близких) корреляций от K объясняется вполне удовлетворительно и достаточно просто. Значительно менее ясным является вопрос о зависимости корреляций от времени. Численные эксперименты показывают, что эта зависимость совсем не всегда имеет вид простой экспоненты

$$C(\tau) \propto \exp(-A h \tau),$$

как когда-то считалось, даже если КС-энтропия $h > 0$. На рис. 8 приведен пример затухания корреляций для стандартного отображения при $K=7$. Как видно, зависимость $C(\tau)$ для четных τ удается неплохо подогнать с помощью функции

$$C(\tau) \approx \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{\tau}). \quad (12.5)$$

Природа такого закона убывания корреляций остается неясной, хотя похожие результаты получены аналитически и для других динамических систем, но

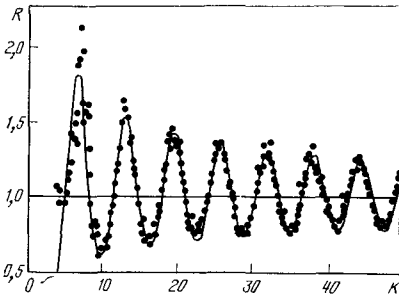


Рис. 7. Зависимость приведенной скорости диффузии $R=4 D_p/K^2$ для стандартного отображения от параметра отображения K : точки — численные данные из работы [34]; кривая — расчет по формуле (12.4)

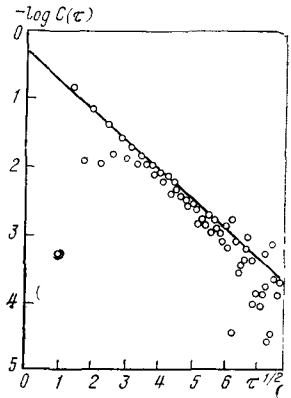


Рис. 8. Затухание корреляций $C(\tau)$ в стандартном отображении при $K=7$: τ — задержка (число итераций), логарифм — десятичный. Для $\tau=1$ и $\tau \geq 4$ численные значения $C(\tau)$ определяются флуктуациями при усреднении (11.4) по одной траектории на 10^6 итераций. Прямая — функция $C(\tau) = 0,5 \exp(-\tau/7)$

всяком случае, как оценка сверху [36]. С другой стороны, для похожих отображений закон затухания корреляций может и значительно отличаться от (12.5) (см. [37]).

Поведение корреляций становится совсем сложным при $|K| \sim 1$. Существенным здесь является наличие границы между стохастической и устойчивой областями с очень сложной структурой (см. например, [38]). Как мы видели в § 10, такая граница является характерной особенностью структуры фазового пространства частицы в ловушке. Вблизи границы скорость диффузии резко падает. Это моделируется зависимостью скорости диффузии для стандартного отображения от K при $K \rightarrow 1$. Согласно численным данным работы [8], корреляционный фактор в этой области

$$R(K) \propto (|K| - 1)^s; \quad s \approx 2.6. \quad (12.6)$$

Совершенно другим методом из результатов численного моделирования движения в стохастическом слое в работе [39] получено $s \approx 4$. Благодаря медленной диффузии вблизи границы траектория надолго застревает в этой области, что приводит, в частности, к более медленному убыванию корреляций. Согласно [39], качественное изменение характера движения вблизи границы наступает при $s > 2$. Оказывается, что в этом случае время диффузии до границы становится бесконечным, т. е. стохастическая траектория не достигает границы стохастической компоненты. Это можно получить из следующей оценки [39]. Пусть x есть соответствующим образом нормированное расстояние от границы стохастической компоненты и $d \langle (\Delta x)^2 \rangle / dt \sim D_x(x) \sim x^s$ [в тонком пограничном слое $K(x) = 1 - \alpha x$; $K(0) = 1$ (12.6)]. Так как скорость диффузии быстро растет с x , то время выхода из слоя меньше x будет определяться временем диффузии на расстояние порядка x , т. е. $\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim x^2$. Отсюда

$$t > x^{2-s} \quad (12.7)$$

и при $s > 2$ $t \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

В последнем случае ($s > 2$) качественно изменяется также и поведение корреляционных функций. Действительно, вблизи границы x пропорционально ω — относительному фазовому объему (площади) пограничного слоя, а значит, и вероятности попадания траектории в эту область. При усредненном выражении вида (11.4) для функций корреляции по стохастической компоненте доля траекторий, остающихся в слое, меньше $x(\tau) \sim \tau^{-1/(s-2)} \propto \omega(\tau)$, и будет определять асимптотическое поведение корреляции при $\tau \rightarrow \infty$:

$$C(\tau) \rightarrow F(\tau)/\tau^q; \quad q = 1/(s-2). \quad (12.8)$$

Это выражение справедливо только при $s > 2 (q > 0)$, так как в противном случае корреляции уже не определяются пограничным слоем. Функция $F(\tau)$ зависит, вообще говоря, от поведения функции $f(\theta, p)$, к которой относятся корреляции $C(\tau)$ [например, $f = \sin \theta$ в (11.4)], в пограничном слое. В частности, $F(\tau)$ может осциллировать, так что $\langle F(\tau) \rangle = 0$ (среднее по τ).

Как отмечалось выше (см. § 11), для стандартного отображения при $|K| \sim 1$ существуют значительные области устойчивости и поэтому можно ожидать степенное убывание корреляций вида (12.8). Такое поведение действительно наблюдалось при численном моделировании, причем, как оказалось, $q \approx 1$ ($K=2,1$), что соответствует $s \approx 3$ (12.8). При этом для $f = \cos \theta$ среднее $\langle F(\tau) \rangle \neq 0$, и интеграл от $C(\tau)$ расходится. Помимо этого, среднее по стохастической компоненте $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$ из-за наличия областей устойчивости. На диффузию по p это, однако, не сказывается существенным образом, поскольку она определяется корреляциями функции $f = \sin \theta$ (11.7), т. е. той самой функции, которая определяет Δp в отображении (9.3). В этом случае $\langle F(\tau) \rangle = \langle \sin \theta \rangle = 0$ при любой форме области устойчивости вокруг неподвижной точки θ_j , в которой $\sin \theta_j = 0$. Действительно, среднее по стохастической компоненте

$$\langle \sin \theta \rangle_{ct} = \langle \sin \theta \rangle_0 - \langle \sin \theta \rangle_{уст},$$

где $\langle \sin \theta \rangle_0 = 0$ — среднее по всему фазовому квадрату, а $\langle \sin \theta \rangle_{уст}$ — среднее по устойчивой компоненте. Но последнее также равно нулю, так как оно пропорционально среднему изменению импульса в устойчивой области $\langle \Delta p \rangle = 0$. Аналогичным образом можно показать, что и $\langle F(\tau) \rangle = 0$ в этом случае. При больших $|K|$, а именно при $K = 2\pi n$ ($n \neq 0$, целое), существуют устойчивые области другого типа, так называемые «ускорительные», в центре (θ_a) которых $\sin \theta_a \neq 0$ и для которых $\langle \Delta p \rangle \neq 0$ [8]. Тогда $\langle \sin \theta \rangle_{ct} \neq 0$; $\langle F(\tau) \rangle \neq 0$ и диффузия становится аномально быстрой. Возможно, именно этим объясняется значительный выброс точек на рис. 7 в первом максимуме $R(K)$, который как раз соответствует $K = 2\pi$. В следующих максимумах площадь ускорительных областей быстро падает, а с ней и их вклад в среднюю скорость диффузии.

Аномально медленное убывание корреляций, возможно, содержится также и в экспериментальных данных по удержанию электронов в магнитной ловушке, описанных в работе [40]. На рис. 9 показан типичный пример экспериментальной зависимости потока выходящих из ловушки электронов ($-\dot{N}$) от времени в полулогарифмическом масштабе. Авторы ожидали экспоненциальное уменьшение потока (а значит, и числа оставшихся в ловушке электронов N) от времени. Такая зависимость действительно наблюдается в течение некото-

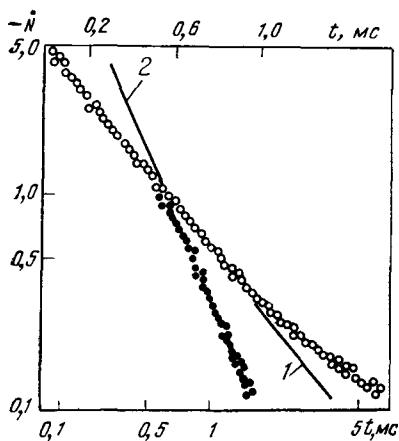


Рис. 9. Зависимость потока электронов из магнитной ловушки от времени по данным работы [40]: $(-\dot{N})$ — поток выходящих электронов (масштаб произвольный). Кружки показывают зависимость $\dot{N}(t)$ в полулогарифмическом масштабе (верхняя шкала для t); 1 — соответствует экспоненциальной зависимости $\dot{N} = A \exp(-t/\tau_e)$, $\tau_e \approx 0,36$ мс. Точки показывают те же данные (для $t \geq 0,6$ мс) в двойном логарифмическом масштабе (нижняя шкала для t); 2 — степенная зависимость $\dot{N} = Bt^{-\gamma}$; $\gamma \approx 2,3$

рого времени ($\approx 2,5 \tau_e$), однако дальше спадание потока замедляется (кружки на рис. 9). Авторы подгоняют «хвост» зависимости $\dot{N}(t)$ с помощью второй экспоненты с большим τ_e .

Вообще говоря, зависимость типа суммы нескольких экспонент не является удивительной, а, напротив, типична для решения линейного уравнения вообще и диффузионного уравнения в частности (см. § 11). Если, однако, отложить данные работы [40] в двойном логарифмическом масштабе (точки на рис. 9), то «хвост» зависимости $\dot{N}(t)$ еще лучше подгоняется степенной функцией с показателем $\gamma \approx 2,3$. Это уже необычно для диффузионного уравнения и означает отсутствие (несингулярных) собственных функций. Окончательный выбор между экспоненциальной и степенной зависимостью требует дополнительных экспериментов при больших t и лучшем вакууме. Последнее необходимо в связи с тем, что роль рассеяния электронов на остаточном газе быстро возрастает со временем, поскольку электроны удерживаются во все более и более тонком пограничном слое. Объем этого слоя приблизительно пропорционален его толщине и числу оставшихся в стохастической компоненте электронов, которое убывает со временем, как $t^{-\gamma+1} \approx t^{-1,3}$. По такому же закону убывают и корреляции, т. е. $q \approx 1,3$ (12.8) и $s \approx 2,8$.

Хотя приведенные выше значения показателей s и q заметно различаются, не исключено, что возможно универсальное описание асимптотической структуры пограничного слоя при $x \rightarrow 0$; $t \rightarrow \infty$. Такая возможность основана в конечном счете на иерархической структуре нелинейных резонансов (см. [8], разд. 4.4). Первые успешные попытки масштабнo-инвариантного описания некоторых характеристик движения вблизи границы стохастичности предприняты в работах [23, 41, 42].

§ 13. Глобальная диффузия

Для описания длительной диффузии частицы в магнитной ловушке (по μ или β_0) нужно знать полное уравнение ФПК (11.16), а не его локальный вариант с $U_\mu = 0$; $D_\mu = \text{const}$. Прежде всего необходимо поэтому найти выражение для средней скорости U

Как уже отмечалось выше (см. § 11), прямое вычисление U_μ во втором порядке теории возмущения затруднительно. Более удобным оказывается следующий простой прием, который использовался во многих работах (см., например, [33]). Пусть нам известна равновесная функция распределения [в нашем случае $f_s(\mu)$]. Для замкнутых гамильтоновых систем она легко получается из микроканонического распределения, например такого:

$$F_e(\mu, J) d\mu dJ = \delta(H^0(\mu, J) - E) d\mu dJ, \quad (13.1)$$

где E — заданное значение энергии. Заметим, что мы используем здесь невозмущенные действия μ, J и соответственно невозмущенный гамильтониан. Возмущение же считается достаточно малым, так что можно пренебречь вызываемым им искажением энергетической поверхности. Иначе говоря, мы принимаем, что возмущение приводит только к распределению траектории по всей невозмущенной энергетической поверхности с эргодической мерой (плотностью вероятности) $F_e(\mu, J)$. При необходимости можно (по крайней мере, в принципе) перейти к уточненным действиям $\mu^{(n)}, J^{(n)}$; при этом гамильтониан, вообще говоря, тоже изменяется (см. § 5). Заметим, что еще одним из преимуществ принятого нами выбора невозмущенной системы (см. § 2) является возможность получения равновесной функции распределения из невозмущенного гамильтониана.

Для получения равновесного распределения только по μ проинтегрируем (13.1) по J :

$$\begin{aligned} f_s(\mu) d\mu &= d\mu \int \delta(H^0(\mu, J) - E) \left(\frac{\partial J}{\partial H^0} \right)_\mu dH^0 = \\ &= d\mu \int \frac{\delta(H^0 - E) dH^0}{\Omega(\mu, J)} = \frac{d\mu}{\Omega(\mu, E)}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

В последнем соотношении J выражено через μ, H^0 и положено $H^0 = E$.

Если, например, $\Omega(\mu) \propto \sqrt{\mu}$, как в короткой ловушке (3.12), то равновесная плотность $df_s \propto d\mu/\sqrt{\mu} \propto d\beta_0$ (при $\beta_0 \ll 1$), т. е. пропорциональна элементу плоского, а не телесного угла, как для свободной частицы. Это связано с тем, что при увеличении угла β_0 растет частота продольных колебаний Ω и уменьшается их амплитуда (при заданной энергии E), а следовательно, и «продольная часть» фазового объема. Если же магнитное поле однородно, то $J \rightarrow p_{\parallel} = v_{\parallel}$, а $\Omega \rightarrow v_{\parallel} = v \cos \beta$ и $df_s \propto d\mu/v_{\parallel} \propto \sin \beta d\beta$, т. е. пропорционально просто элементу телесного угла.

С другой стороны, равновесная функция $f_s(\mu)$ может быть получена из уравнения ФПК, если приравнять нулю поток Q . Отсюда

$$U_\mu = \frac{1}{f_s} \frac{d}{d\mu} (D_\mu f_s) = \frac{dD_\mu}{d\mu} \therefore D_\mu \frac{d(\ln f_s)}{d\mu}. \quad (13.3)$$

Это и есть общая формула для определения средней скорости U_μ . Заметим, что для ее вывода совершенно неважно, существует ли фактически в данной системе равновесное распределение или нет. Для электронов в ловушке равновесное распределение может и не достигаться, например, из-за их вылета в конус потерь или из-за того, что функция f_s не нормируема, т. е. полная мера на энергетической поверхности оказывается бесконечной (см. ниже). Все это никак не влияет на предельную функцию $f_s(\mu)$. Соотношение (13.2) есть просто локальное определение инвариантной меры эргодической гамильтоновой системы на основании теоремы Лиувилля.

Возвращаясь к соотношению (13.3), мы видим, что если $f_s = \text{const}$, то

$$U_\mu = dD_\mu/d\mu. \quad (13.4)$$

Это простое соотношение между коэффициентами уравнения ФПК было (неявно) получено в работе [43] из казалось бы довольно общего принципа детального равновесия. Тем не менее оно выполняется далеко не всегда [44, 45]. Не выполняется оно и для нашей задачи, если только $d\Omega/d\mu \neq 0$.

Принцип детального равновесия обычно связывают с механической обратимостью движения. Вероятности прямых и обратных переходов для обратимой динамики, конечно, равны, но вычислять их нужно по полной мере (т. е. с учетом всех измерений фазового пространства) эргодической компоненты. В рассматриваемой задаче это совсем не так. Во-первых, мы совершенно не учитываем сопряженных с действиями фаз. В работе [45] показано, что это допустимо при отсутствии устойчивых областей. Во-вторых, мы исключили одно из действий (J) и, наконец, что самое главное, эргодическая компонента движения для замкнутой системы ограничена энергетической поверхностью. Все это приводит к тому, что для оставшейся переменной μ , изменение которой мы и хотим описать с помощью диффузионного уравнения ФПК, плотность вероятности (инвариантной меры) $f_s \propto \Omega^{-1}(\mu)$, а не константе, и соотношение (13.4) не выполняется, а вместе с ним и «принцип» детального равновесия (для этой переменной μ). Последнее просто означает, что вероятность перехода пропорциональна в данном случае не $d\mu$, а $df_s \propto d\mu/\Omega(\mu)$.

Отсюда ясно, что для использования обратимости движения в форме принципа детального равновесия последний должен быть сформулирован в адекватных переменных, которые можно было бы назвать эргодическими [45]. В общем случае они не совпадают с невозмущенными интегралами движения, как иногда считается. В рассматриваемой задаче, например, эргодической переменной является величина (обозначим ее Γ), пропорциональная равновесной функции распределения, т. е. вероятности на эргодической компоненте. Переменную Γ можно определить, например, посредством:

$$d\Gamma = d\mu/\Omega(\mu). \quad (13.5)$$

Тогда вероятности прямого и обратного переходов между двумя любыми областями с одинаковым $d\Gamma$ будут равны (принцип детального равновесия), $f_s(\Gamma) = \text{const}$ и $U_\Gamma = dD_\Gamma / d\Gamma$ (13.3). В последнем равенстве мы можем теперь перейти назад к переменной μ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} D_\Gamma &= D_\mu (d\Gamma/d\mu)^2; \\ U_\Gamma &= U_\mu \frac{d\Gamma}{d\mu} + D_\mu \frac{d^2\Gamma}{d\mu^2} = \frac{U_\mu}{\Omega} - \frac{D_\mu}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{d\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

При вычислении U_Γ необходимо разложить $\Delta\Gamma$ по $\Delta\mu$ до второго порядка включительно. Отсюда

$$U_\mu = \Omega \frac{dD_\Gamma}{d\Gamma} + \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu} = \frac{dD_\mu}{d\mu} - \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu}. \quad (13.7)$$

Это соотношение можно, конечно, получить и прямо, из (13.3).

Помимо динамических переменных можно подвергнуть преобразованию и время. В частности, можно выбрать новое время τ так, чтобы новая частота $\Omega(\mu) = d\psi/d\tau = \text{const}$, например: $d\tau = \Omega(\mu) dt$. Согласно (13.5) величина μ становится при этом эргодической переменной, а коэффициенты уравнения ФПК для функции $f(\mu, \tau)$ удовлетворяют соотношению (13.4). Именно таким свойством и обладает дискретное время отображения, единица которого равна $T/2 = \pi/\Omega$. Этот же результат можно получить и более формально, используя соотношение (13.7). Действительно, обозначив

$$D_\mu = \frac{\Omega}{\pi} D_\mu^{(0)}; \quad U_\mu = \frac{\Omega}{\pi} U_\mu^{(0)}, \quad (13.8)$$

где величины D_μ , U_μ относятся к непрерывному времени, а $D_\mu^{(0)}$, $U_\mu^{(0)}$ — к дискретному, получим из (13.7)

$$U_\mu = \frac{\Omega}{\pi} \frac{dD_\mu^{(0)}}{d\mu} + \frac{D_\mu^{(0)}}{\pi} \frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu} = \frac{\Omega}{\pi} \frac{dD_\mu^{(0)}}{d\mu}$$

или

$$U_\mu^{(0)} = dD_\mu^{(0)}/d\mu. \quad (13.9)$$

Отметим, что соотношение (13.9) отличается от (11.18), которое было получено непосредственно из отображения (8.7). Это отображение оказывается, таким образом, справедливым только в первом порядке по малому параметру k . Отсюда, в частности, следует, что оно не годится для численного моделирования длительной (глобальной) диффузии ($\delta\mu \geq \mu$), когда эффект средней скорости U_μ становится существенным (см. § 11).

Проблема аккуратного диффузионного описания для аналогичной задачи (модель стохастического ускорения Ферми) обсуждалась с разных сторон в работах [46—48] (см. также [9]).

Как известно, соотношение (13.9) упрощает уравнение ФПК,

поэтому целесообразно решать задачу именно в дискретном времени. Из (11.16) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mu} \mu \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad (13.10)$$

где мы опустили индекс нуль у D_μ , которое дается выражением (11.13).

В качестве примера рассмотрим магнитную ловушку, в которой резонансное $\Delta\mu$ и параметр устойчивости K можно оценить в приближении короткой ловушки (10.14). Если $\beta_0^{(kp)} \gg \beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2} \ll 1$, то можно в первом приближении пренебречь колебаниями скорости диффузии с K и положить в (11.13) $R(K) \approx 1$. Вводя новое время (тоже дискретное)

$$s = t (\Delta P)_m^2 \lambda / 4\mu_0, \quad (13.11)$$

где $\mu_0 = v^2/2\omega_0$, и новую переменную $x = \beta_0/\beta_0^{(a)}$, запишем уравнение для собственных функций в виде [см. (13.10)]:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{df_x}{dx} \right) + \kappa^2 x f_x = 0 \quad (13.12)$$

с граничными условиями

$$f_x(1) = 0; \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{kp}} = 0. \quad (13.13)$$

Первое условие соответствует выходу частиц на адиабатическом кснусе $\beta_0 = \beta_0^{(kp)}$, а второе — отсутствию потока частиц на границе стохастичности $\beta_0 = \beta_0^{(a)}$ (10.15) ($x_{kp} = \beta_0^{(kp)}/\beta_0^{(a)}$). Наименьшее собственное значение $\kappa^2 \neq 0$ определяет время жизни частиц в ловушке в условиях стохастичности движения

$$f(\mu, s) \rightarrow \exp(-\kappa^2 s). \quad (13.14)$$

Решение уравнения (13.12) выражается через цилиндрические функции (см., например, [22])

$$f_x(x) = C J_0(\kappa x) + N_0(\kappa x). \quad (13.15)$$

Собственное значение и постоянная C определяются из граничных условий (13.13):

$$\left. \begin{aligned} C J_0(\kappa) + N_0(\kappa) &= 0; \\ C J_1(\kappa x_{kp}) + N_1(\kappa x_{kp}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

При $x_{kp} \gg 1$ приближенное решение этих уравнений можно записать в явном виде, используя асимптотические выражения:

$$\left. \begin{aligned} N_0(z) &\approx \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \left(\frac{\gamma z}{2} \right); \\ N_1(z) &\approx -\frac{2}{\pi z} + \frac{z}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma z}{2} \right); \\ J_1(z) &\approx z/2 \end{aligned} \right\} \quad ((13.17)$$

при $z \ll 1$; $\gamma = 1,78\dots$ — постоянная Эйлера. Малое значение κ при $x_{кр} \gg 1$ сразу следует из того, что первая собственная функция (13.15) должна быть всюду положительной. Поэтому $\kappa x_{кр} \leq 1$ и $\kappa \leq 1/x_{кр}$. Подставляя (13.17) в (13.16), получаем из первого уравнения

$$C = -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa}{2}\right)$$

и из второго

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{x_{кр}^2}{2} \ln x_{кр}. \quad (13.18)$$

Собирая все соотношения, найдем для характерного времени жизни частицы (число пролетов через ловушку):

$$\tau_e \approx \frac{\mu_{кр}}{(\Delta P)_m^2} \ln(\lambda \beta_{кр}^2) \approx \frac{16}{9\pi} \left(\frac{L}{r_0}\right)^{3/2} \frac{\exp(3q/2)}{q} \ln(\lambda \beta_{кр}^2), \quad (13.19)$$

где $\beta_{кр} \equiv \beta_0 \hat{r}$. Последнее выражение написано с использованием формул (8.8) и (10.15), т. е. для короткой ловушки с добавлением узкого конуса потерь ($\lambda \gg 1$). С увеличением пробочного отношения λ время жизни частиц медленно возрастает, точно так же, кстати говоря, как и при многократном рассеянии на газе [1]. Аналогичное соотношение получается и для встречных пробок (в плоской геометрии), также дополненных некоторым конечным конусом потерь.

Оценку времени жизни частиц в ловушке можно провести и по-другому, как это было сделано в первой по адиабатическим ловушкам работе Будкера [1] для эффекта многократного рассеяния частиц. Рассмотрим стационарный режим диффузии частиц с источниками внутри ловушки. Из (13.10) имеем:

$$\frac{d}{d\mu} \mu \frac{df_q}{d\mu} + q(\mu) = 0, \quad (13.20)$$

где $q(\mu)$ — плотность источников, которую мы выберем в виде

$$q(\mu) = \mu^\alpha \quad (13.21)$$

с постоянной $\alpha > -1$. Поток частиц в ловушке

$$Q(\mu) = D_\mu \frac{df_q}{d\mu} = - \int_{\mu_{кр}}^{\mu} q d\mu = \frac{\mu_{кр}^{\alpha+1} - \mu^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad (13.22)$$

где $\mu_{кр} = \mu_0 x_{кр}^2 / \lambda$ соответствует границе стохастичности и $Q(\mu_{кр}) = 0$. Полный стационарный поток частиц из ловушки

$$Q_0 = Q(\mu_a) \approx \frac{\mu_{кр}^{\alpha+1}}{\alpha + 1} = \frac{\mu_{кр} q(\mu_{кр})}{\alpha + 1},$$

$\mu_c = \mu_0/\lambda$ — значение μ на адиабатическом конусе потерь, и мы принимаем, что $\mu_a \ll \mu_{кр}$. С другой стороны, из (13.22) находим плотность частиц в ловушке

$$f_q(\mu) = \int_{\mu_a}^{\mu} \frac{Q d\mu}{D_\mu} \approx \frac{1}{(\Delta P)_m^2} \frac{\mu_{кр}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln \frac{\mu}{\mu_a}, \quad (13.23)$$

считая, как и выше, $D_\mu \approx \mu (\Delta P)_m^2$; $f(\mu_a) = 0$.

Полное число частиц в ловушке в стационарном режиме

$$N = \int_{\mu_a}^{\mu_{кр}} f_q(\mu) d\mu \approx \frac{\mu_{кр}^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\Delta P)_m^2} \ln \frac{\mu_{кр}}{\mu_a}. \quad (13.24)$$

Теперь можно ввести среднее время жизни частицы

$$\langle \tau \rangle \equiv \frac{N}{Q_0} \approx \frac{\mu_{кр}}{(\Delta P)_m^2} \ln \frac{\mu_{кр}}{\mu_a}, \quad (13.25)$$

которое не зависит от произвольного параметра α (при $\alpha > -1$) и в точности совпадает с τ_e (13.19), так как

$$\mu_{кр}/\mu_a = (\beta_{кр}/\beta_0^{(a)})^2 = \lambda \beta_{кр}^2.$$

Это значит, что в рассматриваемом приближении ($\beta_{кр} \gg \beta_0^{(a)}$) для широкого класса распределений источников среднее время жизни частицы $\langle \tau \rangle$ определяется первой диффузионной модой (собственной функцией). Действительно, сравнивая выражения (13.23) и (13.15) [с учетом (13.17)], мы видим, что в рассматриваемом приближении обе функции распределения совпадают:

$$f_n \propto f_q \propto \ln \frac{\mu}{\mu_a}.$$

Для $\alpha < -2$ аналогичным образом можно получить:

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\mu_{кр}}{|1+\alpha| (\Delta P)_m^2}. \quad (13.26)$$

Теперь среднее время жизни падает с ростом $|\alpha|$ из-за концентрации источников на адиабатическом конусе потерь. В этом случае существенную роль играют все более и более высокие диффузионные моды, так как стационарная функция распределения

$$f_q(\mu) \propto 1 - (\mu_a/\mu)^{|1+\alpha|}$$

имеет резкий обрыв при $\mu \rightarrow \mu_a$, крутизна которого растет с $|\alpha|$.

В полученных выше соотношениях для τ_e и $\langle \tau \rangle$ время жизни частицы выражается в числе ее пролетов через ловушку, или в числе отражений (от магнитных пробок). Для перехода к обычному (непрерывному) времени необходимо умножить полученные выражения на средний полупериод продольных колебаний частицы

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\pi}{\Omega(\mu)} \right\rangle = \pi \int \frac{f(\mu) d\mu}{\Omega(\mu)}. \quad (13.27)$$

Здесь $f(\mu)$ — нормированная функция распределения, соответствующая данному режиму движения, например стационарному режиму с источниками или первой диффузионной моде.

Вблизи адиабатического конуса потерь ($\mu = \mu_a$)

$$\frac{1}{\Omega} \propto \ln \left(16 \frac{\mu_a}{|\mu - \mu_a|} \right)$$

[см. (3.26)]. Если $f(\mu) \propto \mu^{-\mu_a}$, то эта область не дает существенного вклада в интеграл (13.27). Поэтому можно использовать зависимость $\Omega(\mu)$ без учета конуса потерь. Пусть, например,

$$\Omega(\mu) = \Omega_{\text{кр}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_{\text{кр}}}}, \quad (13.28)$$

где $\Omega_{\text{кр}}$ — значение частоты на границе стохастичности [см. (3.12)]. Пусть далее

$$f(\mu) = \frac{\ln(\mu/\mu_a)}{\mu_{\text{кр}} \ln(\mu_{\text{кр}}/\mu_a)} \quad (13.29)$$

— есть нормированная на единицу функция распределения при диффузии (13.23) ($\mu_{\text{кр}} \gg \mu_a$). Тогда интеграл (13.27) дает

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle \approx \frac{2\pi}{\Omega_{\text{кр}}} = 2 \frac{T_{\text{кр}}}{2},$$

т. е. средний период продольных колебаний частицы оказывается в 2 раза больше минимального на границе стохастичности.

Пусть теперь

$$\Omega(\mu) = \Omega_{\text{кр}} \mu / \mu_{\text{кр}}$$

[встречные пробки, см. (3.37) и (3.38)], а диффузионное распределение $f(\mu)$ — то же самое (13.29). В этом случае

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle \approx \frac{T_{\text{кр}}}{4} \ln(\lambda \beta_{\text{кр}}^2) \quad (13.30)$$

и средний период колебаний логарифмически расходится при $\lambda \rightarrow \infty$. Заметим, что при этом эргодическая мера (13.2) также расходится и равновесное состояние не достигается (при $\lambda = \infty$, т. е. при отсутствии конуса потерь). Точнее, процесс релаксации будет при этом неэкспоненциальным, а плотность вероятности (функция распределения) будет везде стремиться к нулю. Простым примером подобной релаксации является однородная диффузия в бесконечном пространстве. В одномерном случае $f(x, t) \propto t^{-1/2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

§ 14. Отображение Коэна

Мы рассмотрели все примеры ловушек, описанных в § 3, кроме двух: длинной ловушки и встречных пробок в цилиндрической геометрии. Движение частиц в этих последних ловушках не сводится к стандартному отображению. Ниже мы рассмотрим эту новую ситуацию на примере цилиндрических встречных пробок. Динамика частиц в длинной ловушке исследована в работе [49] (см. также [4]).

Характерной особенностью динамики частицы в цилиндрических встречных пробках является несимметрия двух полупериодов продольных колебаний частицы, связанная с разной асимптотикой эффективного потенциала при $s \rightarrow \pm \infty$ (3.42). Это приводит к разному времени между последовательными прохождениями минимума поля, а следовательно, и к двум разным функциям $G(P)$, характеризующим последовательные изменения ларморовской фазы в минимуме поля. Сравнивая (3.36) и (3.42) и используя (8.12), можем написать:

$$G_+(P) = \frac{1}{3} \frac{l_0 v^3}{\omega_0 P^4}; \quad G_- = \frac{2}{3} \frac{l_0 v^3}{\omega_0 P^4}, \quad (14.1)$$

где G_{\pm} описывают изменение ларморовской фазы при движении в области положительного и отрицательного s соответственно. Эти изменения отличаются, таким образом, в 2 раза (при том же P). В действительности есть еще дополнительная разница за счет того, что нам нужна ларморовская фаза не точно в минимуме поля, а в точке $s = s_1 \approx -l_0/19$ (7.38). Однако при амплитуде продольных колебаний $a \gg l_0$ этим эффектом можно пренебречь (см. конец этого параграфа).

Поскольку резонансное $\Delta\mu$ описывается в рассматриваемом случае, так же как и в остальных, одним и тем же выражением (7.37) на обоих полупериодах продольных колебаний, то вместо (8.7) получим двухступенчатое отображение

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \theta_1; \quad \bar{\theta}_1 = \theta_1 + G_{\pm}(\bar{P}). \quad (14.2)$$

Здесь θ_1 включает в общем случае дополнительные сдвиги фазы (7.37), а функции G_{\pm} последовательно чередуются между собой. Поэтому (14.2) есть фактически система четырех разностных уравнений, описывающая изменение динамических переменных на полном периоде продольных колебаний частицы. Функции $G_{\pm}(P)$ можно линеаризовать по P , в результате чего получается новое двухступенчатое отображение, которое похоже, но не сводится полностью к стандартному отображению. Его можно записать в виде

$$\bar{p} = p + K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \gamma_{\pm} \bar{p} + \alpha_{\pm}. \quad (14.3)$$

Здесь γ_{\pm} — две разные постоянные, определяемые условием:

$$\frac{G'_{\pm}(P_r)}{\gamma_{\pm}} = G'_0(P_r). \quad (14.4)$$

Резонансное значение P_r находится теперь из соотношения

$$G_+(P_r) + G_-(P_r) = 2\pi r, \quad (14.5)$$

где r — целое, а дополнительные сдвиги фаз равны:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_+ &= G_+(P_r) \bmod 2\pi; \\ \alpha_- &= G_-(P_r) \bmod 2\pi; \\ \alpha_+ + \alpha_- &= 0 \bmod 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Параметр отображения (14.3) (теперь, увы, не единственный) есть

$$K_0 = (\Delta P)_m G'_0(P_r) \quad (14.7)$$

и новая переменная

$$p = G'_0(P_r)(P - P_r). \quad (14.8)$$

В таком виде (с $\alpha_{\pm}=0$) двухступенчатое отображение (14.3) было получено впервые Коэном [49] при анализе движения частиц в длинной магнитной ловушке. Хотя эта ловушка и симметрична относительно плоскости $z=0$ (см. § 3), несимметрия отображения возникает из-за того, что основные особенности магнитного поля сдвинуты из центра ловушки к внутреннему краю пробок (см. § 7). Две ступени отображения соответствуют при этом пролету частицы между особенностями и ее возвращению в каждую из них после отражения от соответствующей пробки. Заметим, что если бы такая ловушка была еще и несимметричной сама по себе (например, имела бы разные пробки), то отображение стало бы трехступенчатым (6 разностных уравнений).

В рассматриваемой задаче о встречных пробках:

$$\left. \begin{aligned} G_0(P) &= I_0 v^3 / 3\omega_0 P^4; \\ \gamma_+ &= 1; \quad \gamma_- = 2; \\ \alpha_+ &= 2\pi\gamma_+/\gamma; \quad \alpha_- = 2\pi\gamma_-/\gamma; \quad \gamma = \gamma_+ + \gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

и $(\Delta P)_m$ определяется соотношением (7.37).

Переходя к анализу динамики отображения Коэна (14.3), рассмотрим сначала, следуя [49], более простой случай, когда $\gamma_+ \ll \gamma_-$. Такая ситуация характерна для длинных ловушек. В этом случае отображение (14.3) можно привести приблизительно к одноступенчатому отображению на полном периоде возмущения. Для этого выразим переменные \bar{p} , $\bar{\theta}$ через \underline{p} , $\underline{\theta}$, которые предшествуют величинам \bar{p} , $\bar{\theta}$ на один полный период отображения (14.3). Записав четыре разностных уравнения в явном виде*

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= p + K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \gamma_- \bar{p}; \\ p &= \underline{p} + K_0 \sin \underline{\theta}; \quad \theta = \underline{\theta} + \gamma_+ p, \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

найдем

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + K_0 [\sin \theta + \sin (\theta + \gamma_+ p + \gamma_+ K_0 \sin \theta)]; \\ \bar{\theta} &= \theta - \gamma_+ K_0 \sin \theta + \bar{p} (\gamma_+ + \gamma_-). \end{aligned}$$

* Если фазы α_{\pm} пропорциональны γ_{\pm} (14.9), то их можно устранить сдвигом импульса $p \rightarrow p + 2\pi/\gamma$.

В последнем уравнении пренебрежем членом $\sim K_0\gamma_+$, а в первом преобразуем выражение в квадратных скобках к виду

$$2 \cos \left(\frac{p\gamma_+}{2} + \frac{\gamma_+ K_0}{2} \sin \theta \right) \cos \left(\theta + \frac{\gamma_+}{2} (p + K_0 \sin \theta) \right) \approx 2 \cos \left(\frac{p\gamma_+}{2} \right) \cos \theta.$$

Основания для сохранения члена $(p\gamma_+/2)$ в первом косинусе, в то время как мы опускаем его во втором, следующие. В первом случае величина $p\gamma_+$ при достаточно больших p может значительно уменьшать возмущение K_0 , тогда как во втором она приводит лишь к несущественному сдвигу фазы. Для динамики фазы важно не абсолютное значение слагаемого $(p\gamma_+/2)$, а его изменение за одну итерацию отображения. Это изменение имеет порядок $K_0\gamma_+$, т. е. такой же, как и остальных отброшенных членов. Все эти члены приводят к появлению второй гармоники возмущения: $\sim K_0\gamma_+ \sin 2\theta$. Для стандартного отображения эта гармоника появляется во втором порядке теории возмущения с относительной амплитудой $\approx K/16$ (см. [8, разд. 5.1]). Отсюда получаем грубое условие применимости рассматриваемого приближения: $\gamma_+ \lesssim 1/16$ (при $\gamma_- \sim 1$).

Вводя новую переменную

$$J = (\gamma_+ + \gamma_-) p = \gamma p, \quad (14.11)$$

получаем отображение

$$\bar{J} \approx J + K_1 \cos \theta; \quad \bar{\theta} \approx \theta + \bar{J}, \quad (14.12)$$

которое по внешнему виду похоже на стандартное отображение [ср. (9.3)].

Существенной особенностью отображения (14.12) является, однако, то обстоятельство, что его параметр

$$K_1 = 2\gamma K_0 \cos \left(\frac{\gamma_+}{\gamma} \frac{J}{2} \right) \quad (14.13)$$

зависит теперь от динамической переменной J . Это приводит к качественному изменению структуры стохастической компоненты, а именно вся она оказывается разрезанной на изолированные полосы узкими щелями с устойчивым движением. Из (14.13) следует, что щели расположены в окрестности $J = J_n$, где

$$\cos (J_n \gamma_+ / 2\gamma) = 0, \quad (14.14)$$

откуда

$$J_n = \frac{\pi\gamma}{\gamma_+} (1 + 2n), \quad (14.15)$$

n — целое. Ширину щели можно оценить из условия: $|K_1| \approx 1$ на границе щели. Разлагая косинус в (14.13) при $J = J_n$, получаем для полной ширины щели

$$\Delta J \approx \frac{2}{K_0\gamma_+} = \frac{2}{\pi K_m} |J_{n+1} - J_n|, \quad (14.16)$$

где $K_m = 2\gamma K_0$ — максимальное значение $|K_1|$. При $K_m \gg 1$ относительная ширина щели становится малой.

Более интересным оказывается вопрос о величине критического возмущения $|K_0| = K_g$, при котором щели исчезают и изолированные стохастические компоненты движения сливаются в одну. В работе [49] предложен критерий

$$K_g^2 \gamma_+ \gamma_- \sim 1 \quad (14.17)$$

на основе следующего простого отображения. При $|K_0| \sim K_g$ щель шириной $\Delta J \sim 1/K_g \gamma_+$, или $\Delta p \sim 1/K_g \gamma_+$, перебивается на одном шаге отображения (14.10), т. е. $(\Delta p)_g \sim K_g$, откуда и получается оценка (14.17). Эта оценка, как и остальные более простые свойства отображения Коэна, хорошо подтверждается проведенным им численным моделированием [49], а также нашими численными данными.

С точки зрения критерия перекрытия резонансов (см. § 10) оценка (14.17) представляет определенную проблему. Перекрытие резонансов в данном случае означает, что ширина щели ΔJ (14.16) становится меньше расстояния между резонансами ($\delta J = 2\pi$), или что условие $|K_1| \geq 1$ выполняется для всех резонансов внутри щели. Отсюда $K_g \gamma_+ \sim 1$, что завышает значение (14.17) в $\gamma_+ \gamma_- (\gg 1)$ раз.

Причина, по которой в данном случае критерий перекрытия резонансов дает грубо неправильный ответ, заключается, по-видимому, в следующем. В окрестности щели амплитуды резонансов весьма быстро (линейно) возрастают с удалением от центра щели. В этих условиях становится существенным одно любопытное проявление взаимодействия резонансов — их взаимное расталкивание. Физический смысл и оценку эффекта легко проследить на простом примере.

Рассмотрим движение в окрестности одного резонанса в приближении маятника [см. гамильтониан (10.3)]. Пусть $p_0 \gg \sqrt{K}$ — невозмущенное (при $K=0$) положение второго резонанса, который мы считаем настолько слабым, что можно пренебречь его влиянием на первый резонанс. Между тем первый резонанс исказит второй таким образом, что его невозмущенная фазовая прямая $p = p_0 = \text{const}$ превратится в кривую $p(\theta) = p_0 + \delta p(\theta)$. Искажение резонансной траектории $\delta p(\theta)$ легко получается в первом порядке по K из уравнения

$$\left. \begin{aligned} p^2(\theta)/2 + K \cos \theta &= F_0^2/2; \\ \delta p(\theta) = p(\theta) - p_0 &\approx -\frac{K}{p_0} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Так как максимум сепаратрисы первого резонанса приходится на $\theta = \pi$ [$K > 0$, см. (10.4)], где $\delta p(\pi) > 0$, то имеет место отталкивание резонансов на величину $\delta p(\pi) \approx K/p_0$.

Возвращаясь к задаче о щели, перепишем последнюю оценку в виде

$$\delta J_{kl} \sim F_l / (J_k - J_l), \quad (14.19)$$

где $J_k \sim k$ — расстояние (по J) от центра щели до смещаемого резонанса номера k , а J_l — то же для смещающего резонанса; F_l — амплитуда смещающего резонанса в таком масштабе, что перекрытие резонансов соответствует $F \sim 1$, т. е. $F \sim |K_1|$. Но амплитуда резонансов около щели $F_l \sim F_0 l$, где F_0 — амплитуда самого слабого резонанса около центра щели. Тогда согласно (14.19) смещение в каждой паре $\delta J_{kl} \sim F_0$. В силу стохастичности движения фазы резонансов случайны и полное смещение каждого из резонансов на данном

значении фазы θ есть $\delta J_k \sim F_0 \sqrt{N}$, где N — суммарное число резонансов в слое. Полное же смещение края щели $\delta J \sim \delta J_k \sqrt{N} \sim F_0 N$. Но $F_0 N \sim K_m$ — амплитуды резонансов в центре слоя. Из условия $\delta J \sim \Delta J$ [ширины щели (14.16)] получается оценка (14.17). Хотя приведенные выше соображения слишком схематичны, представляется весьма правдоподобным, что в рассматриваемой задаче отталкивание резонансов играет существенную роль.

Это красивое явление было впервые рассмотрено качественно в работе [50] и затем аккуратно рассчитано в работе того же автора и других (см. [41]). Следует отметить, что утверждение автора [50], вынесенное им в заголовке статьи — первичные (т. е. первого приближения) резонансы не перекрываются — к данному эффекту отношения не имеет. Это утверждение, конечно, правильно в том смысле, что до того (т. е. при более слабом возмущении), как сепаратрисы резонансов первого приближения коснутся друг друга, возникают достаточно сильные резонансы высших приближений, которые и обеспечивают перекрытие (см. § 10 и [8]). Это, кстати, и приводит как раз к тому, что, например, для двух резонансов одинаковой ширины эффект отталкивания оказывается незначительным. Действительно, из (14.18) можно получить в этом случае оценку

$$\left(\frac{2\delta\rho}{\rho_0} \right)_{\text{кр}} \approx \frac{2K_{\text{кр}}}{\rho_0^2} \approx 0,055,$$

где числовое значение $K_{\text{кр}}$ для двух резонансов взято по данным работы [8, разд. 4.1]. Это же подтверждается и результатами работы [41], согласно которым $2K_{\text{кр}}/\rho_0^2 = 0,0612$. Однако эффект отталкивания становится существенным при разной ширине резонансов. Так, при отношении ширины двух резонансов, равном 3, отталкивание полностью компенсирует эффекты высших приближений, и критическое значение возмущения совпадает с результатом, полученным по критерию перекрытия первичных резонансов [41]. Для максимального отношения 5, рассмотренного в этой работе, критическое возмущение превышает последнее значение приблизительно в 1,7 раза.

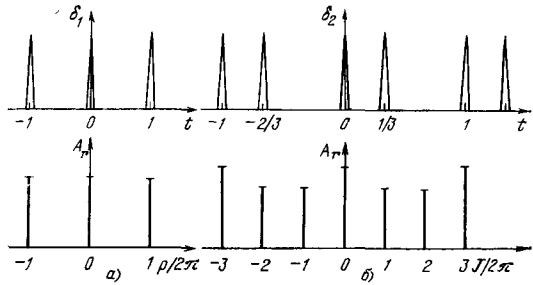
Отметим, что для стандартного отображения отталкивание целых и полупелых резонансов вообще отсутствует из-за симметрии отображения. Отталкивание, однако, смещает резонансы высших (в частности, третьего) порядков, что несколько понижает в данном случае $K_{\text{кр}}$. Из сравнения аналитических оценок в [8], где отталкивание не учитывалось, с фактическим значением $K_{\text{кр}}$ следует, что эффект отталкивания в данном случае лежит в пределах 10 %.

Вернемся к задаче о движении частицы в ловушке со встречными пробками. Так как в данном случае $\gamma_+/\gamma_- = 1/2$, то рассмотренное выше приближение не годится. Однако при таком «круглом» отношении γ_+/γ_- возможен другой подход к задаче. Рассмотрим вначале стандартное отображение (9.3). Действие возмущения в этом случае можно рассматривать как периодическую последовательность коротких «толчков» (рис. 10, а). Этот удобный метод неоднократно применялся при анализе отображений (см., например, [8, 9]). При таком подходе разностные уравнения можно заменить в точности эквивалентными им дифференциальными

$$dp/dt = K \sin \theta \delta_i(t); \quad d\theta/dt = p \quad (14.20)$$

Рис. 10. Схема возмущения $\delta(t)$ и его спектра A_r :

a — для стандартного отображения (9.3) — однородная система резонансов $r=p/2\pi$; *b* — для отображения Козна (14.10) для частицы в магнитной ловушке со встречными ирробками, $\gamma_-/\gamma_+=2$, $r=J/2\pi$



с гамильтонианом

$$H(p, \theta, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \delta_1(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{K}{2} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp [i (\theta - 2\pi r t)] + \text{к. с.} \right\} \quad (14.21)$$

Здесь время измеряется в числе итераций отображения; основная частота возмущения равна соответственно 2π ; $\delta_1(t)$ — периодическая δ -функция с периодом 1 (рис. 10, *a*), фурье-разложение которой приводит к последнему выражению (14.21). Как мы уже знаем (см. § 9), стандартное отображение имеет однородную систему резонансов $(p_r/2\pi)=r$ (рис. 10, *a*). Перекрывтие этих резонансов (с учетом высших приближений) и определяет критическое $K_{кр} \approx 1$.

Рассмотрим теперь отображение Козна (14.10) для $\gamma_-/\gamma_+=2$. В этом случае возмущение будет иметь вид периодической последовательности пар «толчков», и 4 уравнения (14.10) снова можно заменить парой дифференциальных уравнений вида (14.20). Если в качестве единицы времени выбрать полный период возмущения, то уравнения (14.10) примут вид:

$$dp/dt = K_0 \sin \theta \delta_2(t); \quad d\theta/dt = 3p, \quad (14.22)$$

так как за полный период фаза изменится на величину $(\gamma_+ + \gamma_-)p = 3p$, а функция $\delta_2(t)$ изображена схематически на рис. 10, *б*. Вводя новый импульс $J = 3p$ (14.11), придем к гамильтониану

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + 3K_0 \cos \theta \delta_2(t) = \frac{J^2}{2} + \frac{3K_0}{2} \left\{ \sum_r A_r \exp [i (\theta - 2\pi r t)] + \text{к. с.} \right\}. \quad (14.23)$$

В отличие от стандартного отображения амплитуды резонансов теперь неоди-наковы (рис. 10, *б*):

$$|A_r| = \left| 1 + \exp \left(\frac{2\pi i r}{3} \right) \right| = \begin{cases} 2; & r/3 \text{ — целое;} \\ \sqrt{3}; & r/3 \text{ — дробное.} \end{cases} \quad (14.24)$$

В первом приближении критическое значение возмущения будет определяться при этом перекрывтием двух соседних резонансов меньшей амплитуды. По-

сколько отношение амплитуд разных резонансов ($2/\sqrt{3} \approx 1,15$) мало отличается от единицы, поправки высших приближений и эффект отталкивания резонансов (и то и другое несколько уменьшает критическое возмущение) будут незначительны. Но отсюда следует, что для определения критического возмущения можно приближенно заменить отображение Козна (14.10) стандартным отображением

$$\bar{J} = J + 3\sqrt{3} K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{J}, \quad (14.25)$$

которое соответствует одинаковым амплитудам всех резонансов ($|A_r| = \sqrt{3}$). Заметим, что если бы мы прямо использовали отображение (14.12) с параметром (14.13)

$$K_1 = 6K_0 \cos\left(\frac{\pi r}{3}\right) = \begin{cases} \pm 6K_0; & r/3 - \text{целое;} \\ \pm 3K_0; & r/3 - \text{дробное,} \end{cases}$$

то получили бы результат, не слишком сильно отличающийся от (14.25). Это показывает, что для оценок по порядку величины отображение (14.12) можно использовать при любом отношении γ_+/γ_- .

Следует отметить, что есть еще одно различие между стандартным отображением (14.25) и интересующей нас системой (14.23). В первом случае не только амплитуды, но фазы всех резонансов одинаковы, так что перекрытие определяется максимальным расстоянием между ветвями сепаратрисы (см. рис. 1). Теперь же соседние резонансы сдвинуты относительно друг друга по фазе θ на $\Delta\theta = 60^\circ$. Поскольку расстояние между ветвями сепаратрисы пропорционально $\cos(\theta/2)$ (10.4), то его относительное уменьшение вследствие этого сдвига будет составлять $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0,87$, что приведет к увеличению критического возмущения примерно на 13% будет частично компенсировать отмеченное выше уменьшение критического возмущения.

Пренебрегая всеми этими поправками, получим из (14.25) для критического возмущения в отображении Козна с $\gamma_-/\gamma_+ = 2$ значение

$$|K_0|_{\text{кр}} \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (14.26)$$

или, в параметрах ловушки со встречными пробками [см. (14.1), (14.7), (7.37)]:

$$\beta_0^{(\text{кр})} \approx 2,6q^{9/40} \exp(-q/5), \quad (14.27)$$

где $q = \omega l_0/3v = l_0/3\rho m$. Это выражение отличается лишь незначительным численным множителем от соотношения (10.18) для плоских встречных пробок при соответствующем выборе параметра q (см. § 7).

При оценке скорости диффузии ограничимся случаем, когда $3\sqrt{3}|K_0| \gg 1$ и можно пренебречь корреляциями, так что $R(K) \approx 1$ (см. § 12). В отображении (14.2) можно также считать при этом, что оба «толчка» статистически независимы. При описании диффузии в дискретном времени выберем в качестве единицы снова полупериод продольных колебаний. Тогда выражение (11.13) для D_μ останется прежним, а вместе с ним и все другие соотношения в § 11, 13.

Конечно, корреляционный фактор $R(K)$ будет теперь другим. Его можно получить аналогично тому, как это было сделано в § 12 для стандартного

отображения с учетом, разумеется, корреляции двух «толчков» в отображении (14.2). Отметим, наконец, что период продольных колебаний выражается в нашем случае соотношением [см. (3.37), (3.38), (3.42)]:

$$T = \frac{T_+ + T_-}{2} = \frac{3v l_0}{\mu \omega_0}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \frac{\mu \omega_0}{v l_0}. \quad (14.28)$$

В принятом приближении никаких щелей в стохастической компоненте не возникает. Это связано с тем, что мы рассматривали только продольные колебания большой амплитуды $a \gg l_0$, для которых $\gamma_-/\gamma_+ = 2$. При меньших амплитудах это отношение падает и возникает медленная зависимость амплитуды резонансов от ρ , что может приводить к образованию щелей и изоляции отдельных стохастических компонент движения. Вообще говоря, щели могут существовать и в пределе очень больших амплитуд колебаний за счет того, что отношение γ_-/γ_+ не равно точно 2, а несколько меньше из-за дополнительного сдвига фазы в (7.37). Из (3.38) и (7.38) получается оценка

$$\Delta = 2 - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \sim \frac{1}{20} \sqrt{\frac{l_0}{a}}.$$

Так как эта величина очень мала, то число резонансов в изолированной части стохастической компоненты, т. е. между соседними щелями ($\sim 1/\Delta$), может быть сравнимо с полным числом резонансов, и тогда наличие или отсутствие щелей несущественно.

В чисто динамической системе любая щель полностью останавливает диффузию и таким образом существенно улучшает удержание частицы в ловушке. В реальной ситуации, однако, такое улучшение проблематично, так как ширина щели обычно мала и даже незначительное многократное рассеяние частиц будет приводить к «просачиванию» их через щели. Этот вопрос заслуживает более подробного исследования, тем более что необходимую для образования щелей асимметрию можно легко ввести в любую ловушку.

Отметим в заключение этого параграфа, что эффект некоторого специального возмущения в токамаке также описывается отображением Коэна [51].

§ 15. Замечания об адиабатической инвариантности

Рассмотренная в этой статье задача Будкера об условиях и точности сохранения магнитного момента заряженной частицы в адиабатической магнитной ловушке является частным случаем общей и в некотором смысле «вечной» проблемы классической механики — проблемы адиабатической инвариантности переменных действия. Как и любая другая инвариантность, последняя играет в физике важную роль, несмотря на то, что она является, вообще говоря, приближенной. Согласно наиболее распространенным представлениям, основное условие адиабатической инвариантности связывается с медленностью возмущения. Такое представление возникло в самом начале изучения этого явления и было непосредственно связано с методом усреднения, который использовался для установления адиабатической инвариантности. Позднее стало ясно, что сама по себе медленность возмущения не позволяет понять механизм нарушения адиабатической инвариантности. Воз-

ника неясная идея, что этот механизм связан каким-то образом с резонансами между внешним параметрическим возмущением и собственными колебаниями системы. В период бурного развития квантовой механики, для которой переменные действия вообще и их адиабатическая инвариантность в частности играют особую роль, Борн, например, писал (цитируется по работе [52]): «Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком соотношении с периодом невозмущенной системы...» Но это была лишь интуиция. Впервые вопрос о роли резонансов для адиабатической инвариантности был четко поставлен и решен в 1928 г. в работе [52]. Для этого оказалось достаточным, внимательно посмотреть с точки зрения физики на хорошо известное уравнение Матье и его решения. Действительно, зоны неустойчивости, или области параметрического резонанса, существуют в окрестности любого целого отношения частот $\omega_0/\Omega = r/2$, где ω_0 — невозмущенная частота линейного осциллятора, Ω — частота гармонического параметрического возмущения, r — целое положительное. Но при $r \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 0$, и возмущение становится адиабатическим согласно критерию медленности. Тем не менее при попадании в резонанс энергия осциллятора (и его действие) будет изменяться с течением времени сколь угодно сильно, т. е. адиабатическая инвариантность нарушается, несмотря на медленность возмущения. Таким образом возникает другое представление об адиабатическом возмущении, как о возмущении нерезонансном (ср. приведенное выше высказывание Борна). Между этими двумя разными не первый взгляд представлениями имеется, на самом деле, тесная связь, состоящая в том, что медленность возмущения обеспечивает экспоненциальную малость резонансных гармоник (см. § 7). Это справедливо, в частности, и для уравнения Матье:

$$J = J_0 e^{\gamma t}; \quad \gamma \approx r \Delta \Omega \approx \frac{\Omega}{3} \left(\frac{e^2 \epsilon^2}{8} \right)^r, \quad (15.1)$$

т. е. скорость экспоненциального роста в зоне резонанса сама экспоненциально уменьшается с ростом отношения частот $r = 2\omega_0/\Omega$. Глубина модуляции частоты определяется здесь соотношением: $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \epsilon^2 \cos \Omega t)$. Выражение для инкремента неустойчивости γ и полной ширины резонансной зоны $\Delta \Omega$ получается из (7.1) при $r \gg 1$, если заменить $\omega_x = 1 + x^2$ на $\omega(t)$, и при $\epsilon \ll 1$ имеет вид (15.1).

Для линейного осциллятора из двух условий адиабатичности решающим является нерезонансность. Резонансные зоны в этом случае четко ограничены и определяются только параметрами системы.

Для нелинейного осциллятора нерезонансность есть вопрос начальных условий. Ее роль существенно разная в зависимости от числа степеней свободы системы. Для замкнутой системы с двумя степенями свободы, а также для нелинейного осциллятора с одной степенью свободы и внешним параметрическим возмущением

ем решающим для адиабатической инвариантности является медленность возмущения. Принципиально новым и притом строгим результатом является здесь доказательство существования конечной критической медленности возмущения, ниже которой адиабатический инвариант становится точным интегралом движения [10]. Этот результат существенным образом связан с особой топологией системы резонансов, которую можно назвать упорядоченной, или одномерной. В этом случае имеется только одно отношение двух частот, которое зависит от одной переменной действия (в замкнутой системе второе действие исключается с помощью интеграла энергии, см. § 8). Значение такой упорядоченной топологии связано с тем, что точный интеграл существует не для всех начальных условий, а только для «нерезонансных». В нелинейной системе этот термин имеет особый смысл, поскольку нерезонансной является здесь и область в самом центре резонанса, т. е. при таком значении переменной действия, когда условие резонанса выполняется точно (см. рис. 6). Более того, последняя область является, как правило, даже более устойчивой в том смысле, что точный интеграл сохраняется здесь и при перекрытии резонансов, ведущем к развитию глобальной неустойчивости. Наиболее же неустойчивой оказывается окрестность сепаратрисы нелинейного резонанса, где образуется стохастический слой, который сохраняется при сколь угодно малом и (медленном) возмущении (см., например, [8]). В том случае, когда нелинейный резонанс можно описать в приближении маятника, стохастический слой в окрестности его сепаратрисы вполне аналогичен стохастическому слою в многопробочной ловушке (см. § 10). Ширина этого слоя и соответственно доля «резонансных» начальных условий экспоненциально мала по параметру медленности возмущения. Тем не менее эта область конечна, и точный интеграл в ней отсутствует. Однако из-за одномерности резонансной структуры стохастическая траектория строго ограничена пределами слоя и разрушение интеграла не изменяет (с экспоненциальной точностью!) траекторию движения.

Ситуация кардинально меняется, однако, в случае многомерной (хотя бы двумерной), или неупорядочиваемой, топологии резонансов. Теперь уже траектория может попасть из одного стохастического слоя в другой (т. е. другого резонанса), минуя нерезонансную область с точным интегралом движения. Такой обход устойчивых областей оказывается возможным вследствие пересечения резонансов (и их стохастических слоев) в многомерном пространстве. Иначе говоря, при увеличении размерности фазового пространства хотя бы на единицу* появляется возможность движения не только поперек слоя, ширина которого строго ограничена и мала, но и вдоль слоя, ограниченного, вообще говоря, только интегралом энергии. Это красивое явление было предсказано Арноль-

* Размерность фазового пространства замкнутой гамильтоновой системы всегда четная. Если же на нее действует внешнее периодическое возмущение, то говорят об одном дополнительном измерении (фаза возмущения) и о целом числе степеней свободы.

дом, который построил первый пример такой системы [53]. Подобный процесс получил впоследствии название диффузии Арнольда и был весьма подробно исследован в [8] (см. также [9, 54]).

С точки зрения обсуждаемой здесь адиабатической инвариантности (которая является, конечно, лишь частным случаем общей динамической проблемы устойчивости движения) в многомерной системе требование нерезонансности начальных условий по крайней мере столь же важно, как и требование медленности возмущения. Последнее, как и в упорядоченной топологии, гарантирует отсутствие перекрытия резонансов и обеспечивает существование точного интеграла для подавляющего большинства нерезонансных начальных условий.

В такой ситуации, однако, задача об устойчивости движения вообще и об адиабатической инвариантности в частности становится, как говорят математики, некорректной, или, просто, физически бессмысленной. Дело в том, что хотя общий объем стохастических слоев в фазовом пространстве и является экспоненциально малым, они образуют всюду плотную систему. Конечно, то же самое имеет место и в одномерной топологии. Например, для стандартного отображения любое рациональное значение $p/2\pi$ является резонансным (см. § 10). Однако из-за описанной выше особенности упорядоченной структуры резонансов это не сказывается на движении системы. В многомерном же случае возникает неограниченная диффузия Арнольда.

Существует несколько способов так называемой регуляризации задачи, т. е. ее недвусмысленной формулировки, не зависящей от бесконечно малых изменений начальных условий. Можно, например, поставить задачу об адиабатической инвариантности на произвольно большом, но конечном интервале времени. Так как скорость диффузии Арнольда чрезвычайно быстро падает с ростом порядка резонансов, то любое ограничение по времени сразу же превращает бесконечную и всюду плотную систему резонансов (и их стохастических слоев) в конечную, и задача становится физически осмысленной. При этом условие нерезонансности (по отношению к оставшимся «работающим» стохастическим слоям) является существенным для адиабатической инвариантности.

Другой способ регуляризации состоит в том, чтобы ввести в задачу дополнительную сколь угодно слабую, но конечную внешнюю диффузию [8]. Это опять-таки оставляет конечное число стохастических слоев, диффузия Арнольда в которых превышает по скорости внешнюю диффузию. В такой постановке задачи начальные условия движения несущественны, поскольку внешняя диффузия будет непрерывно смещать динамическую траекторию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую — В кн.: Будкер Г. И. Собрание трудов. М.: Наука, 1982, с. 72.

2. **Чириков Б. В.** Проблема устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке. — Физика плазмы, 1978, т. 4, № 3, с. 521.
3. **Cohen R. H.** Orbital resonances in nonaxisymmetric mirror machines.— Comments Plasma Phys. Cont. Fusion, 1979, vol. 4, N 6, p. 157.
4. **Chirikov B. V.** Adiabatic invariants and stochasticity in magnetic confinement systems.— Proc. Intern. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980, vol. II, p. 176.
5. **Cohen R. H., Rowlands G., Foote J. H.** Nonadiabaticity in mirror machines.— Phys. Fluids, 1978, vol. 21, N 4, p. 627.
6. **Чириков Б. В.** Однородная модель резонансной диффузии частиц в открытой магнитной ловушке. — Физика плазмы, 1979, т. 5, № 4, с. 880.
7. **Димов Г. И., Закайдаков В. В., Кишииевский М. Е.** Термоядерная ловушка с двойными пробками.— Физика плазмы, 1976, т. 2, № 4, с. 597; **Fowler T. K., Logan P. G.** The tandem mirror reactor.— Comments Plasma Phys. Cont. Fusion, 1977, vol. 2, N 6, p. 167.
8. **Chirikov B. V.** A universal instability of many-dimensional oscillator systems.— Phys. Rep., 1979, vol. 52, N 5, p. 263.
9. **Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.** Regular and stochastic motion, Berlin, Springer, 1983.
10. **Арнольд В. И.** Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи мат. наук, 1963, т. 18, № 6, с. 91
11. **Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.** Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, № 5, с. 320.
12. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
13. **Best R. W. B.** On the motion of charged particles in a slightly damped sinusoidal potential wave.— Physica, 1968, vol. 40, N 2, p. 182.
14. **Бакай А. С., Степановский Ю. П.** Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
15. **Howard J. E.** Nonadiabatic particle motion in cusped magnetic fields.— Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 11, p. 2378.
16. **Дыхне А. М., Чаплик А. В.** Изменение адиабатического инварианта частицы в магнитном поле.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1961, т. 40, № 2, с. 666
17. **Крускал М.** Адиабатические инварианты. М.: Изд-во иностр. лит., 1962
18. **Gardner C. S.** Magnetic moment to second order for axisymmetric static field.— Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 10, p. 1997.
19. **Фирсов О. Б.** Отталкивание заряженной частицы от областей с сильным магнитным полем (О точности адиабатического инварианта.) — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. III М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 259.
20. **Hastie R. J., Hobbs G. D., Taylor J. B.** Nonadiabatic behaviour of particles in inhomogeneous magnetic fields. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, 1969, vol. 1, p. 389.
21. **Крушкаль Е. М.** О неадиабатическом движении частиц в неоднородных магнитных полях.— Журн. техн. физ., 1972, т. 42, № 11, с. 2288.
22. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
23. **Greene J. M.** A method for determining a stochastic transition.— J. Math. Phys., 1979, vol. 20, N 6, p. 1183.
24. **Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Динамическая стохастичность в классической механике. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-209, Новосибирск, 1980.
25. **Rosenbluth M. N.** Superadiabaticity in mirror machines.— Phys. Rev. Lett., 1972, vol. 29, N 7, p. 408.
26. **Корифельд И. П., Сияй Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
27. **Алексеев В. М., Якобсон М. В.** Символическая динамика и гиперболи-

ческие динамические системы. Добавление в книге: **Боуэн Р.** Методы символической динамики. М.: Мир, 1979; **Брудно А. А.** Энтропия и алгоритмическая сложность траекторий динамической системы. Препринт ВНИИ системных исследований, М., 1980.

28. **Чириков Б. В.** Природа статистических законов классической механики.— В кн.: Методологические и философские проблемы физики. Новосибирск: Наука, 1982, с. 181.

29. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. Избранные труды Т 2. Киев. Наукова думка, 1970, с. 99.

30. **Lebowitz J. L.** Hamiltonian flows and rigorous results in nonequilibrium statistical mechanics.— In: Statistical Mechanics, New Concepts, New problems, New Applications. Chicago, Univ. of Chicago Press, 1972, p. 41.

31. **Балеску Р.** Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2; Пер. с англ. М.: Мир, 1978, с. 388.

32. **Норман Г. Э., Полак Л. С.** Необратимость в классической статистической механике — Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 337.

33. **Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.

34. **Rechester A. B., White R. B.** Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov — Taylor model.— Phys. Rev. Lett., 1980, vol 44, N 24, p. 1586; **Rechester A. B., Rosenbluth M. N., White R. B.** Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov—Taylor model.— Phys. Rev., 1981, vol. A23, N 5, p. 2664.

35. **Cary J. R., Meiss J. D., Bhattacharjee A.** Statistical characterization of periodic, measure-preserving mappings — Phys. Rev., 1981, vol. A23, N 5, p. 2744

36. **Bunimovich L. A., Sinai Ya. G.** Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers.— Comm. Math. Phys., 1981, vol. 78, p. 479

37. **Grebogi C., Kaufman A. N.** Decay of statistical dependence in chaotic orbits of deterministic mappings.— Phys. Rev., 1981, vol. A24, N5, p. 2829.

38. **Гадияк Г. В., Израйлев Ф. М.** Структура переходной зоны нелинейного резонанса. — Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1302.

39. **Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 81-69. Новосибирск, 1981.

40. **Vora D., John P. I., Saxena Y. C., Varma R. K.** Multiple life times in the nonadiabatic leakage of particles from magnetic mirror traps — Plasma Physics, 1980, vol. 22, N 7, p. 653.

41. **Escande D. F., Doveil F.** Renormalization method for computing the threshold of the large-scale stochastic instability in two degrees of freedom Hamiltonian systems — J. Stat. Phys, 1981, vol 26, N 2, p. 257.

42. **Kadanoff L. P.** Scaling for a critical Kolmogorov—Arnold—Moser trajectory.— Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, N 23, p. 1641; **Shenker S. J., Kadanoff L. P.** Critical behaviour of a KAM surface: Empirical results.— J. Stat. Phys., 1982, vol 27, N 4, p. 631.

43. **Ландау Л. Д.** Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1937, т. 7, № 2, с. 203.

44. **Беляев С. Т.** Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций Т III. М. Изд-во АН СССР, 1958, с. 50

45. **Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-211, Новосибирск, 1980.

46. **Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.** Stochastic and adiabatic behaviour of particles accelerated by periodic forces.— Phys. Rev., 1972, vol. A5, N 4, p. 1852.

47. **Brahic A.** Numerical study of a simple dynamical system.— Astron and Astrophys., 1971, vol. 12, p. 98.

48. **Жданова Т. А., Израйлев Ф. М.** К вопросу о статистическом ускорении Ферми. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 121-74, Новосибирск, 1974.
49. **Cohen R. H.** Stochastic motion of particles in mirror machines. — In: Intrinsic stochasticity in plasmas/Ed. by Laval G. and Gresillon D. Orsay, Edition de Physique, 1979.
50. **Escande D. F.** Primary resonances do not overlap. — In: Intrinsic stochasticity in plasmas/Ed. by Laval G. and Gresillon D. Orsay, Edition de Physique, 1979.
51. **Goldston R. J., White R. B., Boozer A. H.** Confinement of high-energy trapped particles in tokamaks. — Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, N 9, p. 647.
52. **Мандельштам Л. И.** Полное собрание трудов. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 297.
53. **Арнольд В. И.** О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. — Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9.
54. **Нехорошев Н. Н.** Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. — Успехи мат. наук, 1977, т. 32, № 6, с. 5.

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ

Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков

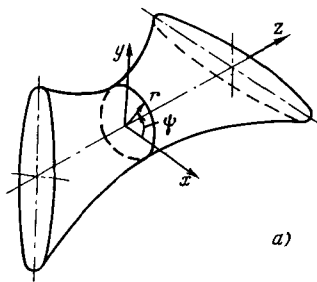
§ 1. Введение

Один из наиболее распространенных и надежных способов обеспечения магнитогиродинамической устойчивости плазмы в открытых ловушках состоит в использовании аксиально-несимметричных магнитных полей, обладающих свойством «среднего минимума B ». Именно этот принцип стабилизации был впервые применен М. С. Иоффе с сотрудниками в начале 60-х годов [1], затем был успешно использован ливерморской группой в серии последовательно усложнявшихся экспериментов, завершившихся сенсационным успехом на установке 2XIIВ [2], а в настоящее время используется в большинстве ловушек с амбиполярными пробками [3—6]. Стабилизация «средним минимумом B » применяется также (см. [7]) в некоторых вариантах многопробочных ловушек.

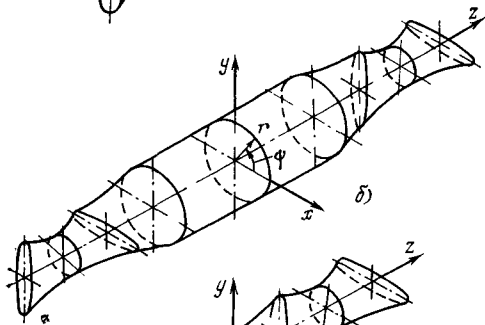
Как было отмечено в работе [8], отсутствие аксиальной симметрии магнитного поля может приводить к возрастанию поперечных коэффициентов переноса по сравнению с их «классическими» значениями за счет механизма, напоминающего в некоторых случаях механизм неоклассической диффузии в замкнутых системах (см. [9]).

В большинстве своем рассматриваемые в настоящей работе процессы переноса обусловлены кулоновскими столкновениями и приводят ко времени жизни, превышающему время кулоновского рассеяния частиц (турбулентный перенос не рассматривается). Соответственно учет этих процессов существен только в применении к ловушкам, в которых продольное время жизни плазмы велико по сравнению со временем ион-ионных столкновений. Такая ситуация реализуется, в частности, в центральном пробкотроне амбиполярной и в многопробочной ловушках. Что касается обычного пробкотрона, то в нем время жизни ионов не превышает, грубо говоря, времени ион-ионных столкновений*, и учет поперечных потерь за счет кулоновских столкновений в худшем случае мог бы привести к уменьшению времени жизни ионов в 1,5—2 раза (по сравнению с чисто продольными потерями). Тем не менее и здесь

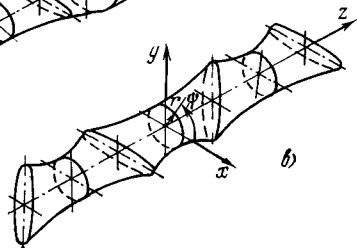
* Если учитывать рассеяние ионов на микрофлуктуациях, то мыслимо положение, когда это рассеяние происходит только в некоторой ограниченной области пространства скоростей ионов, не пересекающей с «конусом потерь». При этом может быть содержательной задача о неоклассической диффузии ионов за счет их рассеяния на микрофлуктуациях.



a)



б)

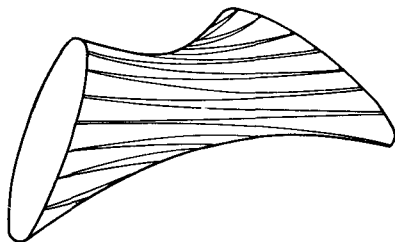


в)

Рис. 1. Форма магнитных поверхностей:

a — в пробкотроне с минимумом B ; б — в амбилярной ловушке; в — в многопробочной ловушке.

Рис. 2. Дрейфовая траектория, «заполняющая» дрейфовую оболочку



эффекты усиленных поперечных потерь могут быть существенны, только в применении не к ионам, а к электронам. Действительно, так как из-за квазинейтральности плазмы время жизни электронов велико по сравнению с временем их кулоновского рассеяния, то имеет смысл задача о столкновительной электронной теплопроводности и диффузии. Естественно, что усиленные диффузия и теплопроводность электронов важны также и для упомянутых выше систем с улучшенным продольным удержанием ионов.

Типичная форма магнитных поверхностей упомянутых выше трех типов установок иллюстрируется рис. 1.

Причиной усиленного переноса являются некоторые особенности движения частиц в аксиально-несимметричном магнитном поле. Будем считать, что магнитное и электрическое поля являются плавными функциями координат и времени с характерными масштабами, существенно превышающими соответственно ларморовский радиус частиц и циклотронный период. В этих условиях имеет место адиабатическая инвариантность величины

$$\mu \equiv mv_{\perp}^2/2B, \quad (1.1)$$

где m — масса частицы; v_{\perp} — скорость вращения по ларморовской окружности; B — напряженность магнитного поля. В контексте настоящей работы μ можно считать просто интегралом движения.

Движение частицы в указанных условиях может быть описано в рамках дрейфового приближения. Ларморовский кружок совершает колебания между магнитными (или электростатическими) пробками и одновременно дрейфует вокруг магнитной оси. Если ловушка не очень длинная, то за один пролет от пробки до пробки ларморовский кружок смещается (вследствие дрейфа) на силовую линию, близкую к исходной (близкую в том смысле, что расстояние между этими силовыми линиями мало по сравнению с характерным пространственным масштабом задачи), и траектория ларморовского кружка «густо» заполняет некоторую поверхность (рис. 2), называемую «дрейфовой оболочкой».

Движение частицы вдоль магнитного поля имеет характер колебаний с медленно изменяющимся периодом. При этом сохраняется так называемый продольный адиабатический инвариант [10]

$$I = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\varepsilon - \mu B - e\varphi} ds, \quad (1.2)$$

где $\varepsilon \equiv \frac{mv^2}{2} + e\varphi$ — полная энергия частицы, а интегрирование ведется вдоль силовой линии магнитного поля между точками остановки частицы. В статическом поле полная энергия частицы не меняется, так что условие $I = \text{const}$ однозначно фиксирует дрейфовую оболочку для частицы с определенными значениями ε и μ , стартовавшей с заданной силовой линии.

Существенно, что в аксиально-несимметричном магнитном поле форма дрейфовых оболочек, проходящих через одну и ту же силовую линию, вообще говоря, зависит от ε и μ (рис. 3), причем максимальное расхождение между оболочками может существенно превышать ларморовский радиус частицы. Именно в этом обстоятельстве кроется источник усиленного переноса: столкновения между частицами, вызывая изменения величины ε и μ , приводят к «перескоку» частиц с одной дрейфовой оболочки на другую, причем «шаг» этих случайных блужданий может достигать максимального расхождения между оболочками [11].

Как видно из сказанного, качество магнитной системы (в смысле обеспечения минимальных поперечных потерь) зависит от того, насколько малым может быть сделано расхождение дрейфовых оболочек, проходящих через одну силовую линию. Оно в точности равно нулю в тривиальном случае магнитных полей, обладающих высокой степенью симметрии — аксиально-симметричных и плоских. В этом случае мы будем говорить, что магнитное поле обладает свойством «вложенности»*. Для магнитных полей более сложной симметрии, реально применяемых для обеспечения « $\min B$ », стремятся по возможности минимизировать расхождение

* Иногда, особенно в литературе на английском языке, для этого свойства используют термин «омнигенность» (omnigenity), предложенный Холлом и Макмаррой.

оболочек и обеспечить свойство вложенности хотя бы приближенно. В частности, в присоединенной области магнитных систем типа Инь-Янь (рис. 4), характерных тем, что при отражении от медианной плоскости с одновременным поворотом на 90° вокруг магнитной оси они совмещаются сами с собой, это свойство выполняется с точностью до членов порядка $(r/l)^2$, где l — продольный масштаб изменения поля, и расхождение дрейфовых оболочек мало. Причина по-

Рис. 3. Характерная форма сечений дрейфовых оболочек плоскостью $z=0$ для ловушек, показанных на рис. 1. Изображены дрейфовые оболочки, проходящие через точку A :

сплошными линиями показаны оболочки, лежащие в пределах одного квадранта; пунктирными — охватывающие магнитную ось O системы; штрихпунктирной — окружность с центром O , проходящая через точку A

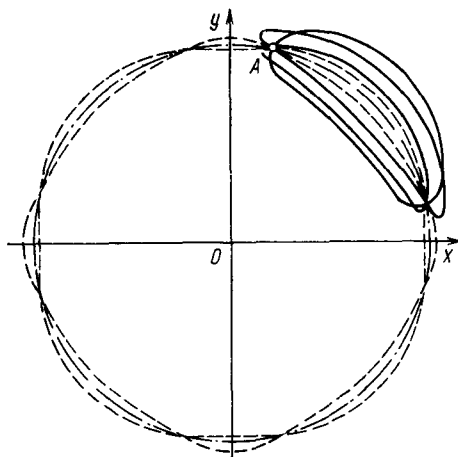
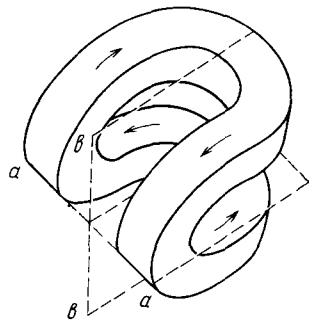


Рис. 4. Магнитная система, обладающая квадрупольной симметрией; aa и bb — плоскости симметрии; направление тока показано стрелкой



явления этой малости в магнитном поле указанной симметрии связана с тем, что, как можно показать, радиальные смещения частицы при отражении от противоположных пробок почти в точности компенсируют друг друга. Зачастую при этом оказывается, что расхождение дрейфовых оболочек, определяемых условием $I = \text{const}$, мало по сравнению с ларморовским радиусом ионов. Тогда может стать существенным учет «тонкой структуры» дрейфовой оболочки, связанной с тем, что при движении «вперед» и «назад» вдоль магнитного поля частица движется «внутри» и «снаружи» усредненной дрейфовой оболочки, определяемой условием $I = \text{const}$. Источником этого «расщепления» дрейфовой оболочки является уже упоминавшийся эффект противоположности знаков смещений при отражении от противоположных пробок; формальное расщепление может быть учтено [12, 13] уточнением выражения для продольного адиабатического инварианта. В некоторых случаях расщепление может вносить существенный вклад в поперечный перенос ионов [14].

До сих пор речь шла о случае, когда период продольных колебаний t_{\parallel} мал по сравнению со временем τ_D обхода ларморовского кружка вокруг магнитной оси. Это автоматически означало, что азимутальное смещение $\Delta\psi$ частицы вокруг магнитной оси за время одного пролета от пробки до пробки мало: $\Delta\psi = \pi t_{\parallel} / \tau_D \ll 1$. Для очень длинных ловушек (реальный пример — центральный пробкотрон амбиполярной ловушки) возможно положение, когда $\Delta\psi$ становится значительным: $\Delta\psi \gtrsim 1$. При этом представление о постепенно покрываемой частицей дрейфовой оболочке теряет смысл. Одновременно перестает сохраняться и адиабатический инвариант I .

Оказывается, что в этой ситуации наибольшими радиальными блужданиями отличаются так называемые резонансные частицы, которые при одном пролете от пробки до пробки совершают рациональное число оборотов вокруг магнитной оси, $\Delta\psi = \pi k/n$, где k, n — целые числа. В частности, для магнитной системы типа Инь-Янь большие радиальные блуждания будут иметь место при $\Delta\psi = (2p-1)\pi/2$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поскольку при этом радиальные смещения при отражении от противоположных пробок складываются. Так как угол прокручивания $\Delta\psi$ при данных ϵ и μ зависит, вообще говоря, от радиуса, то при радиальном перемещении частицы условие резонанса нарушается. Именно эта причина обуславливает конечный масштаб радиальных блужданий резонансных частиц. Реально этот масштаб может быть достаточно большим, так что кулоновское рассеяние резонансных частиц может вызывать усиленный радиальный перенос [8, 15], называемый «резонансным» [15].

Существенно уменьшить этот тип переноса вращением противоположных пробок вокруг магнитной оси друг относительно друга, очевидно, невозможно. Здесь нужно уменьшать радиальное смещение при отражении от отдельной пробки, чего, в принципе, можно добиться специальным подбором пространственной зависимости поля в пробке.

При очень больших значениях $\Delta\psi$ возникает новый тип потерь, прямо не связанный с рассеянием частиц, — так называемая стохастическая диффузия, появляющаяся из-за того, что при очень больших $\Delta\psi$ корреляция между радиальными смещениями при последовательных отражениях от пробок полностью исчезает и радиальные блуждания приобретают характер диффузии даже в отсутствие столкновений [8].

Ясно, что во всех упомянутых случаях характер переноса существенно зависит от структуры магнитного и электрического полей в плазме, поскольку именно они определяют дрейфовое движение частиц. Поэтому решение задачи о переносе неразрывно связано с решением задачи об МГД-равновесии плазмы (так как только после этого можно найти истинное, искаженное влиянием плазмы, магнитное поле) и задачи об отыскании электрического поля в плазме. Учет поправок к магнитному полю, обусловленных давлением плазмы, во многих случаях не сводится лишь к количественному уточнению результатов, а вызывает сильные качественные

изменения (например, при конечном β , вообще говоря, исчезает эффект компенсации смещений от противоположных пробок для системы типа Инь-Янь). Специфические поправки к магнитному полю возникают также из-за возмущений давления плазмы, связанных с радиальными блужданиями частиц.

Сказанное свидетельствует о том, что в рассматриваемой задаче эффекты равновесия и переноса оказываются очень тесно переплетенными между собой, что в значительной мере осложняет формальное решение задачи (по-видимому, в большей степени, чем это имеет место для токамаков).

Дальнейший план изложения следующий. В § 2 сообщаются необходимые сведения из теории равновесия плазмы в аксиально-несимметричных ловушках. В § 3 анализируется движение заряженных частиц. В § 4 строится теория неоклассического переноса ($\Delta\psi \ll 1$), а в § 5 — теория резонансного и стохастического переноса ($\Delta\psi \gtrsim 1$).

§ 2. Равновесие плазмы

2.1. Вакуумное магнитное поле пробкотрона в параксиальном приближении. Вакуумное магнитное поле аксиально-несимметричных магнитных ловушек, как правило, с хорошей точностью можно описывать в так называемом параксиальном приближении, которое предполагает, что силовые линии магнитного поля образуют малый угол с осью системы. Это приближение справедливо вблизи магнитной оси ловушки, на расстояниях, малых по сравнению с характерным масштабом изменения поля вдоль оси. В дальнейшем параксиальное приближение будет систематически использоваться как при рассмотрении равновесия плазмы, так и при оценке коэффициентов переноса.

В приосевой области токи отсутствуют, и поэтому магнитное поле потенциально:

$$\mathbf{V} = -\nabla\chi.$$

Функция χ называется ниже магнитным потенциалом. Ввиду условия $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\chi = 0. \quad (2.1)$$

Обычно на практике магнитное поле создается обмотками, обладающими некоторой пространственной симметрией. Наиболее часто она заключается в наличии двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через магнитную ось системы, таких, что операция отражения в них совмещает обмотку саму с собой. Форма одной из таких обмоток иллюстрируется рис. 4. Из рисунка видно, что отражение в каждой из плоскостей симметрии не только совмещает обмотку саму с собой, но и меняет направление токов в ней на противоположное.

Если выбрать цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль магнитной оси, и полярным углом ψ , отсчитываемым от одной из плоскостей симметрии, то из указанных свойств симметрии обмотки можно усмотреть, что магнитный потенциал удовлетворяет следующим соотношениям симметрии:

$$\chi(r, \psi, z) = \chi(r, -\psi, z), \quad \chi(r, \psi, z) = \chi(r, \pi - \psi, z). \quad (2.2)$$

Для того чтобы найти магнитный потенциал в параксиальном приближении, разложим функцию $\chi(r, \psi, z)$ в ряд Фурье по ψ и в ряд Тейлора по r :

$$\chi = \sum_{n,k} A_{nk}(z) r^n \cos[k\psi + \psi_{nk}(z)]. \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) сразу следует, что $\psi_{nk} \equiv 0$, а k может принимать только четные значения. Требуя теперь, чтобы потенциал (2.3) удовлетворял уравнению (2.1), легко получить, что

$$\chi = A_{00}(z) - \frac{1}{4} A_{00}''(z) r^2 - A_{22}(z) r^2 \cos 2\psi + O(r^4), \quad (2.4)$$

где A_{00} и A_{22} — произвольные зависимости от z , а штрих обозначает дифференцирование по z .

Магнитное поле, которое соответствует потенциалу (2.4), удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_z &= \mathcal{B} - \frac{1}{4} r^2 \mathcal{B}'' - r^2 v' \cos 2\psi + O(r^4), \\ B_r &= -2rv \cos 2\psi - \frac{1}{2} r^2 v' + O(r^3), \\ B_\psi &= 2rv \sin 2\psi + O(r^3), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где введены функции

$$\mathcal{B}(z) \equiv -A_{00}'(z), \quad v(z) \equiv -A_{22}(z),$$

определяющие соответственно напряженность поля на оси и квадрупольную компоненту магнитного поля.

Для упомянутых во Введении систем типа Инь-Янь характерна дополнительная симметрия магнитного поля. Она заключается в том, что семейство силовых линий инвариантно относительно преобразования, состоящего из последовательно выполненных поворота на 90° вокруг магнитной оси и отражения в некоторой плоскости, перпендикулярной этой оси (в дальнейшем эта плоскость называется экваториальной). Если отсчитывать координату z от экваториальной плоскости, то такая симметрия соответствует тому, что функции $\mathcal{B}(z)$ и $v(z)$ являются четными:

$$\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(-z), \quad v(z) = v(-z). \quad (2.6)$$

В случае многопробочной ловушки (рис. 5, а) помимо свойства (2.6) функции $\mathcal{B}(z)$ и $v(z)$ обладают свойством периодичности. При этом если период поля равен L (рис. 5, а), то период функции

$\mathcal{B}(z)$ равен $L/2$. Функция $v(z)$ обращается в нуль в точках максимума функции $\mathcal{B}(z)$ и нечетна относительно этих точек.

С помощью простого интегрирования легко получить уравнение силовой линии, проходящей в экваториальной плоскости через точку r_0, ψ_0 :

$$r(r_0, \psi_0, z) = r_0 \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} (e^\Phi \sin^2 \psi_0 + e^{-\Phi} \cos^2 \psi_0)^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$\psi(\psi_0, z) = \text{arctg}(e^\Phi \text{tg} \psi_0),$$

где

$$\Phi(z) \equiv 4 \int_0^z \frac{v(z')}{\mathcal{B}(z')} dz'. \quad (2.8)$$

Формулы (2.7) имеют точность $O(r^3/l^3)$, где l — масштаб изменения функций $\mathcal{B}(z)$ и $v(z)$. Магнитная поверхность, сечение которой экваториальной плоскостью представляет собой окружность радиуса r_0 , при вхождении в пробку деформируется; ее сечение на координате z имеет форму эллипса и задается следующим уравнением:

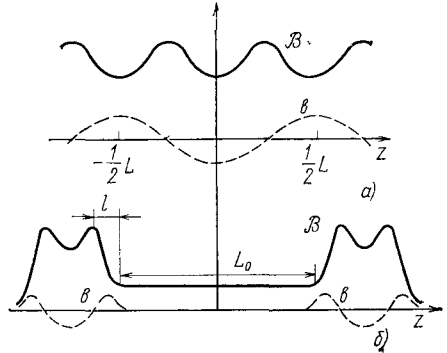


Рис. 5. Форма функций $\mathcal{B}(z)$ и $v(z)$ для многопролочной ловушки (а) и амбиполярной ловушки с длинным центральным пробкотроном (б)

$$r = r_0 \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} (e^\Phi \cos^2 \psi + e^{-\Phi} \sin^2 \psi)^{-1/2}. \quad (2.9)$$

Отношение полуосей эллипса $r(\psi = 0)/r(\psi = \frac{\pi}{2})$ равно $\exp(-\Phi)$.

Для дальнейшего нам потребуются выражения для модуля магнитного поля на силовой линии, проходящей через точку (r_0, ψ_0) , а также для элемента длины ds этой силовой линии. Вычисления с помощью формул (2.5) и (2.7) дают:

$$B(r_0, \psi_0, z) = \mathcal{B}(z) + \delta B(r_0, \psi_0, z);$$

$$\delta B(r_0, \psi_0, z) = \frac{r_0^2 \mathcal{B}(0)}{4} \left\{ \left(\frac{(\mathcal{B}')^2}{2\mathcal{B}^2} - \frac{\mathcal{B}''}{\mathcal{B}} + \frac{(\Phi')^2}{2} \right) \text{ch} \Phi + \Phi'' \text{sh} \Phi - \right.$$

$$\left. - \cos 2\psi_0 \left[\left(\frac{(\mathcal{B}')^2}{2\mathcal{B}^2} - \frac{\mathcal{B}''}{\mathcal{B}} + \frac{(\Phi')^2}{2} \right) \text{sh} \Phi + \Phi'' \text{ch} \Phi \right] \right\} + O(r_0^4); \quad (2.10)$$

$$ds = [1 + \sigma(r_0, \psi_0, z)] dz;$$

$$\sigma(r_0, \psi_0, z) = \frac{r_0^2 \mathcal{B}(0)}{8\mathcal{B}} \left\{ \left(\frac{(\mathcal{B}')^2}{\mathcal{B}^2} + (\Phi')^2 \right) \text{ch} \Phi - \frac{2\Phi' \mathcal{B}'}{\mathcal{B}} \text{sh} \Phi - \right.$$

$$-\cos 2\psi_0 \left[\left(\frac{(\mathcal{B}')^2}{\mathcal{B}^2} + (\Phi')^2 \right) \text{sh } \Phi - \frac{2\Phi' \mathcal{B}'}{\mathcal{B}} \text{ch } \Phi \right] + O(r_0^4). \quad (2.11)$$

В декартовой системе координат x, y, z с осями x и y , лежащими в плоскостях симметрии, силовые линии (2.7) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} x(z) &= r \cos \psi = x_0 \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} e^{-\Phi/2}, \\ y(z) &= r \sin \psi = y_0 \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} e^{\Phi/2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где x_0 и y_0 — координаты силовой линии в экваториальной плоскости. Если ввести в рассмотрение функции

$$X(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} e^{-\Phi/2}, \quad Y(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{B}(0)}{\mathcal{B}(z)}} e^{\Phi/2}, \quad (2.13)$$

обладающие тем свойством, что

$$X(0) = Y(0) = 1, \quad (2.14)$$

то соотношения (2.12) принимают совсем простой вид:

$$x(z) = x_0 X(z), \quad y(z) = y_0 Y(z). \quad (2.15)$$

С помощью (2.13) по данным функциям X и Y параксиальное магнитное поле восстанавливается с точностью до масштабного множителя, равного значению \mathcal{B} в точке $z=0$:

$$\frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{B}(0)} = \frac{1}{XY}; \quad \frac{v(z)}{\mathcal{B}(0)} = \frac{1}{4XY} \frac{d}{dz} \ln \frac{Y}{X}. \quad (2.16)$$

В некоторых задачах более удобно задавать магнитное поле в терминах функций X и Y .

Условимся называть пробкотрон коротким, если его длина L (расстояние между максимумами поля) совпадает с характерным масштабом l изменения функций \mathcal{B} и v . Ниже будет также использоваться модель длинного пробкотрона, в которой предполагается, что аксиально-несимметричные пробки разделены областями однородного поля, длина которой L_0 много больше длины пробки l . Вид функций \mathcal{B} и v для этого случая приведен на рис. 5, б. Условие $L_0 \gg l$ выполняется в центральном пробкотроне амбиполярных ловушек.

Приведем здесь еще выражение для интеграла

$$U \equiv \int \frac{ds}{B}, \quad (2.17)$$

возникающего при изучении равновесия и устойчивости изотропной плазмы в магнитном поле. Интегрирование в (2.17) ведется либо по периоду гофрировки (в случае многопробочной ловушки), либо между двумя поверхностями, относительно которых предполагается

ся, что они удерживают плазму от расширения в продольном направлении. Мы будем считать, что отражающие поверхности суть плоскости $z = \pm L/2$, проходящие через точки максимума магнитного поля на оси ловушки. Интеграл (2.17) является функцией координат r_0 , ψ_0 точки пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью. Пользуясь тем, что

$$\int \frac{ds}{B} = \int \frac{dz}{B_z} \quad (2.18)$$

и вычисляя, как B_z меняется вдоль силовой линии*, после простого интегрирования [с учетом свойств симметрии (2.6)] найдем

$$U = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{\mathcal{B}} + r_0^2 \mathcal{B}(0) \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{\mathcal{B}^3} \left(\frac{1}{4} \mathcal{B}'' \operatorname{ch} \Phi - \epsilon' \operatorname{sh} \Phi \right) + O(r_0^4). \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что сечения магнитных поверхностей $U = \text{const}$ плоскостью $z=0$ представляют собой окружности $r_0 = \text{const}$ [16] [отличие от окружностей появится в следующем приближении по параметру $(r/l)^2$]. В зависимости от знака второго интеграла в (2.19) магнитное поле имеет либо интегральный минимум ($\partial U / \partial r_0 < 0$), либо интегральный максимум ($\partial U / \partial r_0 > 0$). С помощью интегрирования по частям в формуле (2.19), используя условие $\mathcal{B}'(\pm L/2) = 0$, легко убедиться, что аксиально-симметричное параксиальное поле обладает свойством максимума [17]. Минимум U может обеспечить только достаточно большая квадрупольная составляющая поля. Точный критерий на ее величину может быть легко получен из (2.19). Не выписывая его, отметим только, что по порядку величины ϵ по крайней мере должно быть равно \mathcal{B}' . При этом справедливо следующее соотношение между компонентами поля:

$$B_\psi \sim B_r \sim \frac{r}{l} B_z. \quad (2.20)$$

2.2. Равновесие плазмы в коротком пробкотроне. Начнем с анализа равновесия в обычном коротком пробкотроне, рассматривая движение частиц в дрейфовом приближении. В типичных условиях время рассеяния частиц велико по сравнению со временем их дрейфа вокруг магнитной оси (и тем более по сравнению со временем пролета от пробки до пробки). В этом случае стационарные функции распределения ларморовских кружков суть функции дрейфовых интегралов движения

$$f_{e,i} = f_{e,i}(I_{e,i}, \epsilon, \mu), \quad (2.21)$$

где $I_{e,i}$ — продольный адиабатический инвариант. При учете столкновений появляется медленная зависимость этих функций от вре-

* Это легко сделать с помощью формул (2.10), (2.11), учитывая, что $B_z = B dz/ds$.

мени, связанная, в частности, с неклассическим переносом. Зависимость от координат входит в $f_{e,i}$ через инвариант $I_{e,i}$.

При рассмотрении общих вопросов равновесия мы будем пользоваться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 , причем условимся, что координаты ξ^1 и ξ^2 маркируют силовую линию, а координата ξ^3 определяет положение точки на силовой линии (часто в качестве ξ^1 и ξ^2 выбирают полярные координаты r_0, ψ_0 точки пересечения силовой линии с некоторой плоскостью, перпендикулярной магнитной оси системы, а в качестве ξ^3 — расстояние s вдоль силовой линии, отсчитываемое от этой плоскости). При таком выборе системы координат продольный инвариант I есть функция $\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu$.

Через функцию f стандартным образом выражаются продольное и поперечное давления плазмы:

$$p_{\parallel} = 4 \sqrt{2} \pi B \sum_{e,i} m_{e,i}^{-3/2} \int \sqrt{\varepsilon - \mu B \mp e\varphi} f_{e,i} d\varepsilon d\mu, \quad (2.22')$$

$$p_{\perp} = 2 \sqrt{2} \pi B^2 \sum_{e,i} m_{e,i}^{-3/2} \int \frac{\mu f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B \mp e\varphi}}, \quad (2.22'')$$

причем функции p_{\parallel} и p_{\perp} автоматически удовлетворяют условию продольного равновесия

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} (p_{\perp} - p_{\parallel}) = 0. \quad (2.23)$$

Через f можно выразить также продольную (\mathbf{j}_{\parallel}) и поперечную (\mathbf{j}_{\perp}) составляющие тока в плазме. При их нахождении следует помнить, что f — функция распределения ларморовских кружков, а не истинная функция распределения частиц, так что при вычислении, например, \mathbf{j}_{\perp} необходимо учитывать не только ток, связанный с дрейфом ларморовских кружков, но и диамагнитный ток, вызванный их неоднородным распределением в пространстве. Способ вычисления \mathbf{j}_{\perp} можно найти, например, в обзоре [18], а \mathbf{j}_{\parallel} — в работе [13]. Соответствующие выражения имеют вид:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} \{ [\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{x}] (p_{\parallel} - p_{\perp}) + [\boldsymbol{\tau}\nabla p_{\perp}] \}; \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{B^3} j_{\parallel} (B^2 - 4\pi (p_{\perp} - p_{\parallel})) \right] = \frac{c}{B^2} \boldsymbol{\tau} [\boldsymbol{x}\nabla (p_{\parallel} + p_{\perp})], \quad (2.25)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к силовой линии, а \boldsymbol{x} — кривизна силовой линии. Происхождение продольного тока связано с тем, что при колебаниях ларморовского кружка между пробками он движется «вперед» и «назад» по смещенным друг относительно друга линиям (см. разд. 3.1); при этом, если распределение кружков меняется от одной силовой линии к другой, возникает продольный ток, являющийся, таким образом, некоторым аналогом диамагнитного тока (эта наглядная картина указана в работах [13, 19]).

Можно проверить, что из выражений (2.24) и 2.25) автоматически следует условие $\text{div } \mathbf{j} = 0$, которое обязано выполняться в стационарных задачах.

В соотношения (2.22) входит электростатический потенциал. Его распределение вдоль силовой линии может быть определено из условия квазинейтральности $n_e = n_i$. Поскольку n_e и n_i , как это видно из выражения для них через функции распределения

$$n_{e,i} = \frac{2\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{f_{e,i} d\epsilon d\mu}{\sqrt{\epsilon - \mu B \mp e\varphi}}, \quad (2.26)$$

зависят от ξ^1, ξ^2, B и φ , то определенный из условия квазинейтральности потенциал будет функцией силовой линии и модуля магнитного поля:

$$\varphi = \varphi(\xi^1, \xi^2, B). \quad (2.27)$$

Здесь необходима оговорка: функции $n_{e,i}$, рассматриваемые как функции B и φ , могут иметь несколько ветвей. Это возможно в случае, когда так называемый потенциал Юшманова

$$U_{Yu} \equiv \mu B \pm e\varphi, \quad (2.28)$$

определяющий движение частиц вдоль силовой линии, имеет несколько минимумов. Тогда частицы, запертые в каждой потенциальной яме, могут иметь свою функцию распределения и возможна ситуация, когда зависимость вида (2.27) будет выполняться лишь кусочно (по s). Именно так обстоит дело при удержании ионов в обычной зеркальной ловушке, где зависимости $B(s)$ и $\varphi(s)$ имеют вид, показанный на рис. 6, и возникает возможность искажения симметричного относительно плоскости $z=0$ распределения плотности (и потенциала). Соответствующая асимметрия реализуется в крайних пробкотронах амбиполярных ловушек.

Из формул (2.22) и (2.27) с точностью до только что сделанной оговорки следует, что

$$p_{\parallel} = p_{\parallel}(\xi^1, \xi^2, B), \quad p_{\perp} = p_{\perp}(\xi^1, \xi^2, B). \quad (2.29)$$

Фактически условие продольного равновесия (2.23) позволяет, зная одну из этих функций, например p_{\perp} , найти вторую.

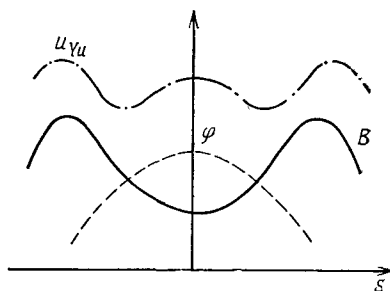


Рис. 6. Распределение магнитного поля, электростатического потенциала и потенциала Юшманова $U_{Yu} = \mu B + e\varphi$ вдоль силовой линии зеркальной ловушки. График U_{Yu} изображен для некоторого фиксированного значения μ . Вблизи минимумов U_{Yu} могут существовать независимые ионные популяции

Соотношения (2.23) и (2.24) можно получить и на основе чисто феноменологического подхода, задавая с самого начала тензор давления плазмы в виде

$$p_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha}\tau_{\beta}p_{\parallel} + (\delta_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha}\tau_{\beta})p_{\perp}$$

и записывая проекции уравнения равновесия

$$\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]_{\alpha}$$

на силовую линию и на плоскость, перпендикулярную к силовой линии. Что же касается соотношения (2.25), то оно при таком подходе возникает из требования бездивергентности полного тока:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\parallel} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp}.$$

Если на торцах ловушки в плазму не втекают токи (что автоматически выполняется, например, когда плазма там граничит с вакуумом), то соотношение (2.25) дает следующее ограничение на допустимые равновесные конфигурации:

$$\int \frac{1}{B^2} \boldsymbol{\tau} [\boldsymbol{\kappa} \nabla (p_{\parallel} + p_{\perp})] ds = 0, \quad (2.30)$$

где интегрирование ведется между границами плазмы. Поскольку p_{\parallel} и p_{\perp} однозначно связаны друг с другом соотношением (2.23), то можно считать, что в этом ограничении фигурирует лишь одна из этих функций, для определенности, p_{\perp} .

Как уже отмечалось выше, ограничение (2.30) автоматически удовлетворяется в том случае, когда $p_{\perp}(\xi^1, \xi^2, B)$ получается редукцией с помощью соотношения (2.22'') из микроскопического дрейфового равновесия (2.21). Если же брать за основу макроскопический подход, то условие (2.30) становится содержательным. Уже тот факт, что при макроскопическом подходе к равновесию необходимо налагать условие (2.30), указывает на то, что далеко не для каждой функции $p_{\perp}(\xi^1, \xi^2, B)$ можно найти функцию $f(I, \epsilon, \mu)$, которая была бы связана с p_{\perp} соотношением (2.22''). Более того, можно показать, что даже среди функций $p_{\perp}(\xi^1, \xi^2, B)$, удовлетворяющих условию (2.30), существуют такие, которые нельзя получить из дрейфовой функции распределения с помощью соотношения (2.22'').

В важном частном случае изотропного давления, реализующемся в центральном пробкотроне амбиполярной ловушки и в многопробочной ловушке, соотношения (2.24) и (2.25) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{j}_{\perp} = c \frac{[\mathbf{B}\nabla p]}{B^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{j_{\parallel}}{B} = \frac{2c\boldsymbol{\tau}}{B^2} [\boldsymbol{\kappa}\nabla p]. \quad (2.32)$$

При этом условии (2.30), как можно показать (см. [20]), эквивалентно утверждению, что p постоянно на поверхностях $U = \text{const}$ (определение U см. в разд. 2.1).

В § 3 при анализе дрейфового движения частиц нам потребуется найти искажение вакуумного магнитного поля в системе типа Инь-Янь за счет конечного давления плазмы. Все наиболее существенные особенности этих искажений проявляются уже в случае плазмы малого давления, которым мы и ограничимся. Рассмотрение при этом упрощается тем, что можно сначала найти распределение давления плазмы в вакуумном магнитном поле, а затем, вычислив по формулам (2.24) и (2.25) плазменный ток, определить поправки к вакуумному магнитному полю.

Задача еще более упрощается при рассмотрении параксиального приближения. В нулевом приближении по параметру r/l равновесие на каждом небольшом отрезке плазменного шнура можно рассматривать так, как если бы имела только z — составляющая магнитного поля, т. е. записывать уравнение равновесия в виде (пользуемся цилиндрическими координатами):

$$p_{\perp}(r_0, \psi_0, z) + B_z^2/8\pi = \mathcal{B}^2(z)/8\pi, \quad (2.33)$$

где $\mathcal{B}(z)$ — вакуумное поле на оси системы. Мы допускаем возможность наличия нескольких ветвей зависимости p_{\perp} от B , и поэтому используем в (2.33) обозначение $p_{\perp}(r_0, \psi_0, z)$ [а не $p_{\perp}(r_0, \psi_0, B)$].

В приближении малого β (β , как обычно, есть отношение давления плазмы к давлению магнитного поля) из (2.33) имеем:

$$\begin{aligned} B_z &= \mathcal{B} + \delta B_z; \\ \delta B_z &= - \frac{4\pi p_{\perp}(r_0, \psi_0, z)}{\mathcal{B}(z)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В целом — с учетом малых эффектов непараксиальности — структура магнитного поля может быть найдена двойным разложением по параметрам β и r/l . Результат имеет следующую структуру:

$$B_z = \mathcal{B} + O(\beta) + O\left(\frac{r^2}{l^2}\right) + O\left(\beta \frac{r^2}{l^2}\right) + \dots, \quad (2.35)$$

$$B_r = O\left(\frac{r}{l}\right) + O\left(\beta \frac{r}{l}\right) + \dots, \quad (2.36)$$

$$B_{\psi} = O\left(\frac{r}{l}\right) + O\left(\beta \frac{r}{l}\right) + \dots$$

Член $O(\beta)$ в (2.35) определяется соотношением (2.34), а члены порядка $O\left(\frac{r^2}{l^2}\right)$ в (2.35) и $O\left(\frac{r}{l}\right)$ в (2.36) — соотношениями

(2.5). Что же касается членов типа $O\left(\beta \frac{r^2}{l^2}\right)$ и $O\left(\beta \frac{r}{l}\right)$,

то для их отыскания требуется учет продольного тока ($j_{\parallel} \sim j_{\perp} r/l$) и зависимости j_{\perp} от z . Фактический расчет этих членов оказывает-

ся очень громоздким. Представление о нем можно составить из работ [21].

Следующий важный вопрос состоит в отыскании возможного вида функций $p_{\perp}(r_0, \psi_0, z)$, определяющих равновесие. Мы рассмотрим этот вопрос для плазмы с малым β , ограничиваясь для простоты случаем изотропного давления. При этом, естественно, подразумевается, что продольное удержание обеспечено — либо система периодична вдоль оси z (многопробочная ловушка), либо на концах ловушки имеются перпендикулярные к магнитному полю стенки, идеально отражающие частицы.

В таких условиях поверхности постоянного давления совпадают с поверхностями $U = \text{const}$, где U определяется формулой (2.17). При $\beta \rightarrow 0$, как показано в разд. 2.1,

$$U(r_0, \psi_0) = U_0 + \text{const} \frac{r_0^2}{l^2} + O\left(\frac{r_0^4}{l^4}\right). \quad (2.37)$$

Зависимость от ψ_0 появляется здесь только в членах $\sim (r_0/l)^4$. Соответственно линии $U(r_0, \psi_0) = \text{const}$ с точностью до членов $\sim (r_0/l)^2$ представляют собой окружности.

Для учета эффекта конечного давления удобно записать U в виде (2.18) и подставить в качестве B_z выражение (2.35). Очевидно, что теперь U будет иметь вид:

$$U = U_0 + O(\beta) + O\left(\frac{r_0^2}{l^2}\right) + O\left(\beta \frac{r_0^2}{l^2}\right) + O\left(\frac{r_0^4}{l^4}\right) + \dots \quad (2.38)$$

Член $O(\beta)$ легко вычисляется с помощью формулы (2.34) с $p_{\perp} = p(r_0, \psi_0)$ и оказывается равным

$$-4\pi p(r_0, \psi_0) \int \frac{dz}{\mathcal{H}^3(z)}, \quad (2.39)$$

а член $O(r_0^2/l^2)$ совпадает с $\text{const} (r_0^2/l^2)$ в (2.37). Как показывают громоздкие вычисления, зависимость от ψ_0 имеется теперь не только в членах $O(r_0^4/l^4)$, но и в членах $O(\beta r_0^2/l^2)$.

Задача о равновесии при учете конечного β решается следующим образом. Задав некоторую функцию $p(r_0, \psi_0)$, нужно вычислить по формуле (2.38) $U(r_0, \psi_0)$, после чего потребовать, чтобы линии $U(r_0, \psi_0) = \text{const}$ совпадали с изобарами $p(r_0, \psi_0) = \text{const}$. Слагаемое $O(\beta)$, даваемое равенством (2.39), будучи пропорционально $p(r_0, \psi_0)$, автоматически удовлетворяет этому условию. Поэтому форма равновесия определяется тремя последними слагаемыми. При $\beta \ll 1$ главным среди них является аксиально-симметричное слагаемое $O(r_0^2/l^2)$, так что при $\beta < 1$ изобары близки к окружностям, т. е. $p \approx p(r_0)$. Отклонение изобар от окружностей при $\beta < r_0^2/l^2$ определяется слагаемым $O(r_0^4/l^4)$, а при $\beta > r_0^2/l^2$ — слагаемым $O(\beta r_0^2/l^2)$. Величина этого отклонения может быть оценена следующим образом: $\delta r \sim (r_0/l)^2 + \beta$.

2.3. Равновесие изотропной плазмы в длинном пробкотроне. Специфическими особенностями обладает равновесие плазмы в

центральной пробкотроне амбиполярной ловушки. Эти особенности, отмеченные в работе [22], связаны с его большой длиной ($L_0 \gg l$). Плазму в центральной пробкотроне можно описывать изотропным давлением p . Чтобы не вдаваться в детали структуры электростатических барьеров, имеющих в концевых пробкотронах, ниже рассматривается идеализированная модель, в которой предполагается, что продольное удержание в центральной пробкотроне обеспечивается двумя плоскостями (1 и 4 на рис. 7), расположенными на его концах и упруго отражающими достигающие их частицы плазмы. Для простоты считается также, что силовые линии магнитного поля пересекают эти плоскости по нормали (в параксиальном приближении это означает, что на них выполнены условия $\mathcal{B}' = 0$, $v = 0$).

Задача определения равновесных конфигураций изотропной плазмы состоит в нахождении магнитных поверхностей постоянного давления. В рассматриваемой постановке задачи, когда через торцы пробкотрона токи не вытекают, форма этих поверхностей, как обсуждалось выше, определяется требованием постоянного значения интеграла U , и при $\beta \rightarrow 0$ с точностью до малых $\sim (r/l)^2$ сечения магнитных поверхностей экваториальной плоскостью являются окружностями, $r_0 = \text{const}$.

При конечном, но и малом давлении плазмы исходное магнитное поле лишь слегка искажается. В коротком пробкотроне это приводит к слабому изменению формы вакуумных магнитных поверхностей (см. разд. 2.2), представляющему интерес главным образом в связи с задачей о движении частиц в ловушке (см. разд. 3.3). Напротив, в длинном пробкотроне значительные искажения магнитных поверхностей могут происходить даже при $\beta \ll 1$ [22].

С помощью (2.32) оценим величину продольного тока в сечениях 2, 3 (рис. 7), где вакуумные силовые линии уже прямые, т. е. тока, втекающего в однородную часть ловушки из пробок. В магнитной пробке $\kappa \sim R/l^2$, $j_{\perp} \sim cp/RB$, где R — характерный радиус плазмы, и из (2.32) получаем

$$j_{\parallel} \sim cp/lB. \quad (2.40)$$

Этот ток, протекая по длинной части пробкотрона, создает поперечное магнитное поле:

$$B_{\perp} \sim j_{\parallel} R/c \sim \beta BR/l, \quad (2.41)$$

которое на длине L_0 приводит к уходу силовой линии в радиальном и азимутальном направлениях на расстояние x :

$$x \sim \frac{B_{\perp}}{B} L_0 \sim R \frac{L_0}{L_c}, \quad L_c \equiv l/\beta. \quad (2.42)$$

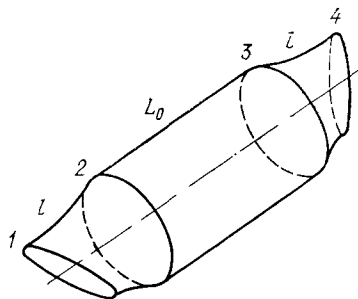


Рис. 7. К задаче о равновесии изотропной плазмы в длинном пробкотроне

Таким образом, если длина однородной части L_0 по порядку величины равна или превышает величину L_c , то следует ожидать сильного искажения поверхностей постоянного давления по сравнению с круговыми цилиндрами даже при $\beta \ll 1$.

При этом, однако, можно пренебречь смещением силовой линии относительно первоначального положения на длине пробки l и, задавшись распределением давления на входе в пробки $p_2(r, \psi)$ и $p_3(r, \psi)$ в сечениях 2 и 3, найти его распределение в пробках, считая просто, что $p = \text{const}$ вдоль вакуумных силовых линий. После этого вычисление j_{\parallel} по формуле (2.32) дает распределение продольного тока $j_2(r, \psi)$ и $j_3(r, \psi)$ в сечениях 2 и 3. Для случая параксиальной пробки соответствующие расчеты приведены в приложении 1. Результат имеет вид:

$$\begin{aligned} j_2 &= ar \frac{\partial p_2}{\partial r} \sin 2\psi + (a \cos 2\psi + d) \frac{\partial p_2}{\partial \psi}; \\ j_3 &= ar \frac{\partial p_3}{\partial r} \sin 2\psi + (a \cos 2\psi - d) \frac{\partial p_3}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где a и d — постоянные, определяемые геометрией магнитного поля в пробке. Легко видеть, что полный ток в сечениях 2 и 3, как и должно быть, равен нулю.

Рассмотрим теперь, как изменяется ток, вытекающий из пробки, вдоль длинной части ловушки. Кривизна силовых линий здесь связана с магнитным полем самих продольных токов и оценивается из того условия, что на длине L_c силовая линия сместилась бы на расстояние R : $\kappa \sim R/L_c^2$. Теперь, используя (2.32), находим изменение j_{\parallel} на длине L_0 :

$$\Delta j_{\parallel} = L_0 \frac{cp}{RB} \frac{R}{L_c^2} \sim j_{\parallel} \frac{L_0}{(L_c/\beta)}. \quad (2.44)$$

В дальнейшем будет предполагаться выполненным соотношение

$$L_0 \ll L_c/\beta \sim l/\beta^2. \quad (2.45)$$

Тогда изменением продольного тока между плоскостями 2 и 3 можно пренебречь и записать условие постоянства j_{\parallel} вдоль силовых линий в виде уравнения

$$\mathbf{B} \nabla j_{\parallel} = 0$$

или, в развернутом виде:

$$\frac{\partial j}{\partial z} = - \frac{B_r}{B_0} \frac{\partial j}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{B_{\psi}}{B_0} \frac{\partial j}{\partial \psi}, \quad (2.46)$$

где B_0 — z -компонента магнитного поля, которая с нужной точностью равна просто вакуумному магнитному полю на однородной части, а j_{\parallel} для краткости обозначено просто j . При нахождении компонент поперечного магнитного поля достаточно считать, что вектор \mathbf{j}_{\parallel} направлен вдоль оси z , тогда

$$B_r = r^{-1} \partial A_z / \partial \psi, \quad B_{\psi} = - \partial A_z / \partial r, \quad (2.47)$$

где $A_z(r, \psi, z)$ — z -компонента векторного потенциала, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \psi^2} = - \frac{4\pi}{c} j. \quad (2.48)$$

Перепишывая уравнение (2.46) в виде

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \frac{1}{rB_0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial j}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial j}{\partial r} \right) \quad (2.49)$$

и добавляя условие постоянства давления вдоль силовых линий

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{rB_0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (2.50)$$

получаем замкнутую систему уравнений (2.48) — (2.50), которая вместе с граничными условиями (2.43) описывает равновесные конфигурации плазмы в длинном пробкотроне.

При $\beta \rightarrow 0$ решение этой системы находится очень просто. Возмущением магнитного поля можно пренебречь, положив $A_z = 0$, а уравнения (2.49) и (2.50) сводятся к требованию постоянства j и p вдоль оси z . Последнее означает, что $p_2 = p_3$ и $j_2 = j_3$, и из (2.43) следует (при $d \neq 0$), что давление на однородном участке пробкотрона не зависит от ψ :

$$p = p_0(r), \quad j = j_0 \equiv ar \frac{dp_0}{dr} \sin 2\psi. \quad (2.51)$$

Этот результат соответствует тому, что поверхности постоянного значения интеграла (2.17) в параксиальном приближении являются круговыми цилиндрами в области однородного магнитного поля.

В случае большого β решать уравнения (2.48) — (2.50) можно, по-видимому, только численными методами. Простое аналитическое решение их удастся получить в пределе $L_0 \ll L_c$, когда искажение вакуумных магнитных поверхностей малó. Для этого линеаризуем систему (2.48) — (2.50) на фоне решения (2.51), обозначив поправки к давлению и току δp и δj :

$$p = p_0(r) + \delta p(r, \psi, z), \quad j = j_0(r, \psi) + \delta j(r, \psi, z).$$

При этом в правую часть (2.48) достаточно подставить j_0 :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \psi^2} = - \frac{4\pi}{c} ar \frac{dp_0}{dr} \sin 2\psi. \quad (2.52)$$

Решение этого уравнения следует искать, задавшись граничными условиями на стенке камеры, окружающей плазменный шнур. Для простоты рассмотрим случай, когда стенка находится достаточно далеко от границы плазмы, тогда необходимые условия состоят в требовании конечности A_z в нуле и на бесконечности. Соответствующее решение имеет вид:

$$A_z = - \frac{4\pi a}{c} G(r) \sin 2\psi, \quad (2.53)$$

где

$$G(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r (r')^3 p_0(r') dr'. \quad (2.54)$$

В этом приближении функция A_z не зависит от z . Из уравнений (2.49), (2.50) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \delta j &= \delta j_2 + \frac{z + \frac{1}{2} L_0}{r B_0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial j_0}{\partial \psi} - \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{\partial j_0}{\partial r} \right), \\ \delta p &= \delta p_2 - \frac{z + \frac{1}{2} L_0}{r B_0} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} \frac{dp_0}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Подставив в (2.55) $z=L_0$, получим связь между δp_2 и δp_3 и между δj_2 и δj_3 . После этого два уравнения (2.43) позволяют определить все четыре функции δp_2 , δp_3 , δj_2 , δj_3 , а второе уравнение в (2.55) дает распределение возмущения давления в однородной части пробкотрона. Легко убедиться, что при этом δp находится с точностью до произвольной функции от r , выбор которой позволяет наложить на δp дополнительное условие: $\langle \delta p \rangle = 0$, где угловыми скобками здесь и ниже обозначается операция усреднения по азимуту:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\psi. \quad (2.56)$$

В результате

$$\begin{aligned} \delta p(r, \psi, z) &= \frac{4aL_0}{crB_0} \frac{dp_0}{dr} \times \\ &\times \left[\frac{2z}{L_0} G \cos 2\psi + \frac{a}{4d} \left(2G - r \frac{dG}{dr} \right) \cos 4\psi \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Учитывая малость δp , уравнение магнитной поверхности $p = \text{const}$ в области однородного магнитного поля можно записать

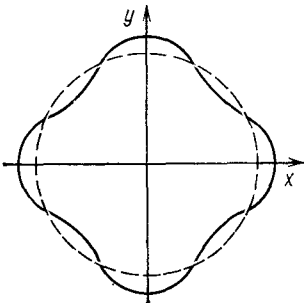


Рис. 8. Форма сечения магнитной поверхности $p = \text{const}$ экваториальной плоскостью ловушки при $\beta=0$ (окружность, изображенная пунктирной линией) и при учете конечного β (сплошная линия). При изменении знака коэффициента перед $\cos 4\psi$ в (2.57) вся картина поворачивается на 45° относительно системы координат

в следующем виде:

$$r(\psi, z) = r_* - \frac{\delta p}{dp_0/dr} \Big|_{r=r_*}, \quad r_* = \langle r \rangle.$$

Качественный вид сечения этой поверхности экваториальной плоскостью ловушки ($z=0$) изображен на рис. 8. Степень отличия сечения магнитной поверхности от окружности может быть охарактеризована величиной $(r_{\text{макс}} - r_{\text{мин}})/r_*$; по порядку величины она равна L_0/L_c .

§ 3. Дрейфовое движение заряженных частиц в открытых ловушках

3.1. Движение частиц в вакуумном магнитном поле. Начнем рассмотрение со случая, когда длина ловушки не слишком велика (точнее см. ниже), так что за один период продольных колебаний частица мало смещается по азимуту, и сохраняется продольный адиабатический инвариант (1.2).

Будем пользоваться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 , введенными в п. 2.2. В этом случае $I = I(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu)$, а дрейфовая оболочка представляет собой магнитную поверхность, определяемую уравнением $I(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu) = \text{const}$. Медленный дрейф частицы с одной силовой линии на другую описывается как изменение со временем координат ξ^1 и ξ^2 . «Уравнения движения» имеют вид [23]:

$$\dot{\xi}^1 = \frac{mc}{eBt_{\parallel}} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial I}{\partial \xi^2}, \quad \dot{\xi}^2 = - \frac{mc}{eBt_{\parallel}} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial I}{\partial \xi^1}, \quad (3.1)$$

где g_{33} — компонента метрического тензора $g_{\alpha\beta}$; g — определитель матрицы $g_{\alpha\beta}$, а точка обозначает дифференцирование по времени. Величина t_{\parallel} представляет собой время движения между точками остановки (половину периода продольных колебаний частицы) и равна:

$$t_{\parallel} = \int_{s_1}^{s_2} ds / |v_{\parallel}|.$$

Заметим, что, хотя B зависит от ξ^3 , скорости $\dot{\xi}^1$ и $\dot{\xi}^2$ не зависят от ξ^3 (как это и должно быть), поскольку, в силу уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) = 0.$$

В некоторых случаях существенно найти (малое) изменение ξ^1 и ξ^2 за некоторую часть периода продольных колебаний частицы.

Соответствующие формулы имеют вид [23]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi^1 &= \frac{mc}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^2} \int_a^b v_{\parallel} ds - v_{\parallel} \frac{B_2}{B} \Big|_a^b \right); \\ \Delta \xi^2 &= -\frac{mc}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \int_a^b v_{\parallel} ds - v_{\parallel} \frac{B_1}{B} \Big|_a^b \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где B_{α} — ковариантные компоненты магнитного поля, a и b — пределы интегрирования. В случае необходимости* интегрирование по ds ведется вперед и назад, с изменением знака v_{\parallel} . Соотношения (3.1) получаются из (3.2), если в последних провести интегрирование по полному периоду продольного движения и результат поделить на период продольных колебаний $2t_{\parallel}$.

Имея в виду потребности реальных экспериментов, рассмотрим форму дрейфовых оболочек в случае, когда магнитная система обладает симметрией типа Инь-Янь (см. разд. 2.1), пренебрегая в начале электрическими полями** и возмущением магнитного поля, связанным с конечным давлением плазмы. В качестве координат ξ^1, ξ^2 используем полярные координаты r_0, ψ_0 точки пересечения силовой линии с плоскостью $z=0$. Имеем:

$$I = I(r_0, \psi_0, \varepsilon, \mu) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2}{m} \sqrt{\varepsilon - \mu B} ds,$$

где интегрирование проводится вдоль силовой линии между точками остановки частицы (т. е. нулями подкоренного выражения). Для пролетных частиц (в случае многопробочных ловушек) интегрирование следует проводить по периоду гофрировки.

Так как дрейфовая оболочка совмещается сама с собой при преобразовании $\psi \rightarrow \psi + \pi/2$, $z \rightarrow -z$, то ее сечение плоскостью $z=0$ переходит в себя при преобразовании $\psi \rightarrow \psi + \pi/2$. Отсюда следует, что зависимость I от ψ_0 должна быть периодической, с периодом $\pi/2$. При этом если отсчитывать ψ от одной из плоскостей симметрии (как это и показано на рис. 1, а), то зависимость будет четной. Соответственно I можно представить в виде ряда

$$I(r, \psi, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} I^{(k)}(r, \varepsilon, \mu) \cos 4k\psi \quad (3.3)$$

(здесь и ниже, если это не оговорено особо, мы будем для краткости использовать обозначения r, ψ вместо r_0, ψ_0). Ясно, что это утверждение, следующее только из свойств симметрии системы, остается справедливым при учете как плазменного электрического

* Например, если требуется найти смещение частицы при ее отражении от магнитной пробки.

** То есть полагая в (1.2) $\varphi=0$.

поля, так и возмущений магнитного поля конечным давлением плазмы*.

Легко убедиться в том, что при $\beta \rightarrow 0$ (вакуумное магнитное поле) разложение I по степеням r содержит только четные степени r . Считая (в соответствии с реальным положением) r малым по сравнению с продольным масштабом изменения магнитного поля l мы ограничимся вычислением двух первых членов разложения [$O(1)$ и $O(r^2)$]. Для этого воспользуемся формулой (2.10) и с помощью (2.11) перейдем в (1.2) к интегрированию по z . С нужной точностью имеем:

$$I \approx \sqrt{\frac{2}{m}} \left[\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}} dz + r^2 \int_{z_1}^{z_2} \left(\sigma \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}} - \frac{\mu}{2} \frac{\delta B}{\sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}}} \right) dz \right], \quad (3.4)$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения $\varepsilon - \mu \mathcal{B}(z) = 0$. Из (2.10), (2.11) видно, что зависящие от ψ члены в δB и σ , а значит, и соответствующие члены в I , пропорциональны $\cos 2\psi$. Но так как, согласно вышесказанному, I как функция ψ имеет период $\pi/2$, то коэффициент при члене $\cos 2\psi$ в выражении для I должен обращаться в нуль [что легко подтверждается прямым вычислением с использованием свойств четности функций $\mathcal{B}(z)$ и $\Phi(z)$]. Таким образом, в разложении I по степеням r члены до второго порядка включительно не зависят от ψ . Это автоматически означает, что сечения дрейфовых оболочек плоскостью $z=0$ представляют собой окружности, и система в указанном приближении обладает свойством вложенности. Явное выражение для I имеет вид:

$$I(r, \psi, \varepsilon, \mu) = I_0(\varepsilon, \mu) + r^2 I_1(\varepsilon, \mu),$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_0(\varepsilon, \mu) &= \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}} dz, \\ I_1(\varepsilon, \mu) &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\sigma \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}} - \frac{\mu}{2} \frac{\delta B}{\sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}}} \right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Выражение для поправки четвертого порядка по r очень громоздко [для того чтобы найти его, необходимо, в частности, удерживать члены четвертого порядка в представлении (2.5) вакуумного поля] и мало поучительно. Важно только отметить, что именно эта поправка приводит к нарушению свойства вложенности (так как

* Подразумевается, что система создания плазмы также обладает соответствующей симметрией.

зависит от ψ). Общая структура выражения для I с точностью до членов четвертого порядка имеет, таким образом, вид:

$$I = I_0(\varepsilon, \mu) + r^2 I_1(\varepsilon, \mu) + r^4 I_2(\psi, \varepsilon, \mu).$$

Последнее слагаемое здесь удобно разбить на две части:

$$I_2' \equiv \langle I_2 \rangle$$

[смысл угловых скобок поясняется формулой (2.56)] и

$$I_2'' = I_2 - \langle I_2 \rangle$$

и представить I в виде

$$I = I_0(\varepsilon, \mu) + r^2 I_1(\varepsilon, \mu) + r^4 I_2'(\varepsilon, \mu) + r^4 I_2''(\psi, \varepsilon, \mu). \quad (3.6)$$

Легко проверить *, что

$$I_2'' = \tilde{I}_2''(\varepsilon, \mu) \cos 4\psi. \quad (3.7)$$

Последнее слагаемое в (3.6), содержащее зависимость от ψ , приводит к нарушению свойства вложенности: так как форма дрейфовой оболочки, проходящей через некоторую точку (r_*, ψ_*) , определяется уравнением $I(r, \psi, \varepsilon, \mu) = I(r_*, \psi_*, \varepsilon, \mu)$, то при $I_2'' = 0$, очевидно, уравнение оболочки имеет вид $r = r_*$, независимо от ε и μ .

При $I_2'' \neq 0$ отклонение линии $I = \text{const}$ от окружности легко найти, учитывая малость I_2'' :

$$\left. \begin{aligned} r(\psi, \varepsilon, \mu) &= r_* + \delta r(\psi, \varepsilon, \mu), \\ \frac{\delta r}{r_*} &= -r_*^2 \cos 4\psi \frac{\tilde{I}_2''(\varepsilon, \mu)}{2I_1(\varepsilon, \mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Тот факт, что в это соотношение входят в качестве параметров ε и μ , и указывает на отсутствие вложенности. Возникающая «невложенность» дрейфовых оболочек порядка $(r/l)^2$.

Последнее утверждение нуждается, правда, в существенном уточнении: оно справедливо только тогда, когда во всей физически интересной области значений ε и μ величина $I_1(\varepsilon, \mu)$ не обращается в нуль. Если же это не так, то частицы, для которых $I_1(\varepsilon, \mu) = 0$, будут совершать большие радиальные блуждания. Разумеется, для них соотношение (3.8) несправедливо; оно должно быть заменено на точное уравнение $r^4 [I_2'(\varepsilon, \mu) + \tilde{I}_2'' \cos 4\psi] = \text{const}$. Поскольку, вообще говоря, $\tilde{I}_2'' \sim I_2'$, то радиальный «размах» оболочек для таких частиц $\delta r \sim r$ (возможна даже ситуация, когда эти дрейфовые оболочки не замкнуты).

В пространстве переменных ε, μ область, где нарушается представление (3.8) и δr становится большим, имеет вид полосы шириной $\delta\mu/\mu \sim (r/l)^2 \ll 1$ вокруг линии, на которой $I_1(\varepsilon, \mu) = 0$. Узость

* Это можно сделать, записав общее выражение для последнего слагаемого в (3.6) в декартовых координатах, $r^4 I_2'' = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$, и воспользовавшись свойствами симметрии дрейфовой оболочки.

этой полосы еще не гарантирует малости поперечных потерь, и поэтому магнитная система должна конструироваться так, чтобы функция $I_1(\varepsilon, \mu)$ не обращалась в нуль [так как изменению знака I_1 соответствует изменение направления дрейфа частиц вокруг магнитной оси, то условие $I_1(\varepsilon, \mu) \neq 0$ означает, что все частицы дрейфуют в одном направлении].

Все сказанное о форме дрейфовых оболочек переносится на случай пролетных частиц (в многопробочных системах) с тем лишь изменением, что для них интегрирование по z в выражении для I следует выполнять по периоду магнитной системы.

Если ловушка сконструирована так, что $I_1(\varepsilon, \mu) \neq 0$, то смещения от противоположных пробок, как показано выше, компенсируются с высокой точностью, и сечения дрейфовых оболочек отличаются от окружностей на малую величину. При этом вполне реальна ситуация, когда радиальное смещение при отражении от каждой из пробок превышает δr .

В самом деле, из (3.2) следует, что при движении от экваториальной плоскости до пробки и обратно ведущий центр частицы смещается по радиусу и по азимуту соответственно на

$$\Delta r_{\pm} \approx \frac{2mc}{e\mathcal{B}r} \frac{\partial}{\partial \psi} I_{\pm}(r, \psi, \varepsilon, \mu) \quad (3.9)$$

и

$$\Delta \psi_{\pm} \approx \frac{2mc}{e\mathcal{B}r} \frac{\partial}{\partial r} I_{\pm}(r, \psi, \varepsilon, \mu),$$

где I_{\pm} соответствует вкладу в I от «половинки» пробкотрона $z \geq 0$ (так что $I = I_+ + I_-$). Отметим, что вследствие симметрии ловушки функции I_+ и I_- инвариантны относительно преобразований $\psi \rightarrow -\psi$, $\psi \rightarrow \pi - \psi$ (а значит, и периодичны с периодом π); кроме того,

$$I_+(r, \psi, \varepsilon, \mu) = I_-\left(r, \psi + \frac{\pi}{2}, \varepsilon, \mu\right). \quad (3.10)$$

Вычисления, аналогичные тем, которые проводились выше, показывают, что разложение I_{\pm} по степеням r содержит только четные степени; с точностью до членов второго порядка включительно

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} I_0(\varepsilon, \mu) + \frac{r^2}{2} I_1(\varepsilon, \mu) \pm \cos 2\psi \frac{r^2}{2} I_1^*(\varepsilon, \mu), \quad (3.11)$$

где

$$I_1^* = \frac{\mathcal{B}(0)}{\sqrt{2m}} \int_0^{z_1} dz (\varepsilon - \mu\mathcal{B})^{-1/2} \mathcal{B}^{-3} [(eF_+ - \mu\mathcal{B}G_+) e^{-\Phi} - (eF_- - \mu\mathcal{B}G_-) e^{\Phi}], \quad (3.12)$$

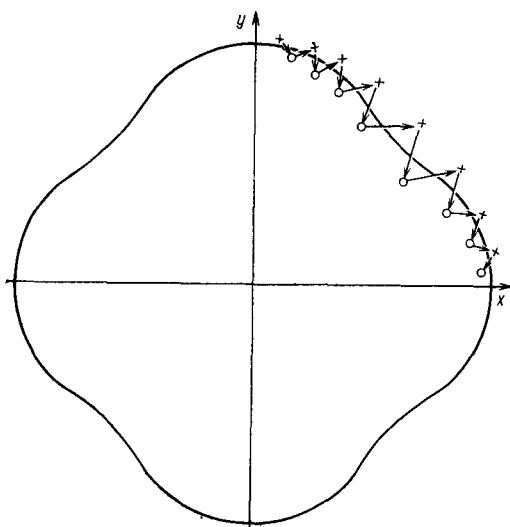


Рис. 9. «Расщепление» дрейфовой оболочки. Точки и крестики (изображенные только в первом квадранте) указывают места пересечений траектории ведущего центра частицы с экваториальной плоскостью ловушки при пролете в положительном и отрицательном направлениях; сплошная линия — сечение дрейфовой оболочки $I = \text{const}$

а функции F и G задаются формулами:

$$F_{\pm} = 4\theta^2 + \frac{1}{4}(\mathcal{B}')^2 \pm 2\theta\mathcal{B}',$$

$$G_{\pm} = 6\theta^2 + \frac{3}{8}(\mathcal{B}')^2 - \frac{1}{4}\mathcal{B}\mathcal{B}'' \pm (3\theta\mathcal{B}' - \mathcal{B}\theta').$$

По порядку величины

$$\Delta r_{\pm} \sim r r_H / l, \quad \Delta \psi \sim r_H / l, \quad (3.13)$$

где r_H — ларморовский радиус частицы. Видно, что $\Delta r_{\pm} > \delta r$ при $r^2 < l r_H$.

При выполнении этого условия радиальные блуждания частиц обусловлены не отличием сечения усредненной дрейфовой оболочки от окружности, а последовательными (противоположными по знаку) смещениями при отражении от пробок. Форма кривой, которую образуют точки последовательного пересечения частицей плоскости $z=0$, показана на рис. 9. Ниже мы будем говорить об эффекте отклонения частиц от усредненной дрейфовой оболочки как о «расщеплении оболочки» (см. [14]).

Как видно из оценки (3.13), величина расщепления автоматически мала по сравнению с ларморовским радиусом частицы. Казалось бы, это означает, что вклад эффекта расщепления в поперечный перенос автоматически мал по сравнению с классическим. Однако, как будет видно из дальнейшего, в тех случаях, когда расщепление имеет узкий максимум как функция ϵ и μ , оно может приводить к большим радиальным потерям (см. разд. 5.3).

Эффект расщепления дрейфовых оболочек проявляется и для пролетных частиц (в многопробочных системах): при пролете через последовательные пробки частица испытывает смещение то в одну, то в другую сторону по радиусу.

Расщепление оболочки является тем микроскопическим механизмом, который приводит к проявлению продольных токов замыкания, определяемых условием (2.25).

3.2. Влияние электрического поля на движение частиц в коротких ловушках. До сих пор речь шла о простейшей ситуации, когда частицы дрейфуют в вакуумном магнитном поле. Включим теперь последовательно в рассмотрение эффекты электрического поля и конечного давления плазмы. Начнем с рассмотрения роли электрического поля. При этом необходимо сделать одну оговорку. Из оценки (3.13) видно, что чем длиннее ловушка, тем меньше азимутальное смещение частицы за один пролет и тем формально лучше выполняется условие адиабатической инвариантности величины I . Однако при учете электрического поля возникает электрический дрейф вокруг магнитной оси, причем изменение угла $\Delta\psi$, связанное с этим эффектом, линейно растет с l . При достаточно больших l значение $\Delta\psi$ становится сравнимым с единицей, и адиабатическая инвариантность I нарушается. Поэтому основанное на инвариантности I рассмотрение справедливо только для достаточно коротких ловушек (таких, что $\Delta\psi \ll 1$).

Исследуем влияние потенциала на форму дрейфовых оболочек для плазмы, удерживаемой в магнитной системе типа Инь-Янь, ограничиваясь параксиальным приближением. Если бы свойство вложенности выполнялось точно, то, как показано в разд. 2.2, потенциал был бы функцией r и B^* [возможность наличия нескольких ветвей функции $\varphi(B)$ пока не рассматривается]. Учет же (малой) невложенности дрейфовых оболочек приведет, очевидно, к тому, что φ приобретет вид:

$$\varphi = \varphi_0(r, B) + \delta\varphi(r, \psi, B), \quad (3.14)$$

где $\delta\varphi$ — малая величина [как будет видно из дальнейшего, $\delta\varphi \sim (r/l)^4$].

В отсутствие $\delta\varphi$ выражение для I имело бы вид:

$$I(r, \psi, \epsilon, \mu) = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\epsilon - \mu B - e\varphi_0(r, B)} \frac{ds}{dz} dz \quad (3.15)$$

(для краткости ограничиваемся положительно заряженными частицами). Зависимость I от ψ , приводящая к отклонению от свойства вложенности, входит сюда через малые величины δB и σ , определенные соотношениями (2.10), (2.11) и имеющие порядок $O(r^2)$. Поэтому с точностью до членов r^2 имеем:

$$I = I_0(r, \epsilon, \mu) + \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \left[\sigma \sqrt{\epsilon - \mu B - e\varphi_0(B, r)} - \frac{\delta B}{2} \frac{\mu - e \frac{\partial \varphi_0}{\partial B}}{\sqrt{\epsilon - \mu B - e\varphi_0(B, r)}} \right] dz, \quad (3.16)$$

* Напомним, что мы для краткости пользуемся обозначениями r, ψ вместо r_0, ψ_0 .

где

$$I_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B} - e\varphi_0(\mathcal{B}, r)} dz, \quad (3.17)$$

а $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z)$. Воспроизводя аргументы, приведенные после формулы (3.4), находим, что и в рассматриваемом случае зависимость I от ψ появляется только в членах четвертого порядка по r .

Ввиду малости $\delta\varphi$, вклад от этой величины в I достаточно учесть в нулевом приближении по параксиальности, что приводит к следующей поправке к I :

$$\delta I_\varphi(r, \psi, \varepsilon, \mu) = \frac{-1}{\sqrt{2m}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e\delta\varphi(r, \psi, \mathcal{B}) dz}{\sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B} - e\varphi_0(\mathcal{B}, r)}}.$$

Таким образом, имеем следующее приближенное представление для I :

$$I = I_0(r, \varepsilon, \mu) + r^2 I_1(r, \varepsilon, \mu) + r^4 I_2(r, \psi, \varepsilon, \mu) + \delta I_\varphi(r, \psi, \varepsilon, \mu). \quad (3.18)$$

Чтобы сделать заключение о величине $\delta\varphi$, воспользуемся условием квазинейтральности ($n_e = n_i$), в которое подставим выражения (2.26) для n_e и n_i . Очевидно, что для φ вида (3.14) и I вида (3.18) формула для $n_{e,i}$ может быть схематически представлена в виде

$$n_{e,i} = n_{e,i}^{(0)}(r, B, \varphi_0) + \left(\frac{r}{l}\right)^4 F_{e,i}(r, \psi, B) + \widehat{L}_{e,i}(\delta\varphi),$$

где $F_{e,i}$ — некоторые функции порядка единицы, а $\widehat{L}_{e,i}(\delta\varphi)$ — линейные функционалы $\delta\varphi$, имеющие нулевой порядок по параметру r/l . Потенциал φ_0 определяется из условия $n_e^{(0)}(r, B, \varphi_0) = n_i^{(0)}(r, B, \varphi_0)$, а поправка $\delta\varphi$ — из условия $(r/l)^4 (F_i - F_e) = \widehat{L}_e(\delta\varphi) - \widehat{L}_i(\delta\varphi)$. Отсюда ясно, что

$$\delta\varphi \sim (r/l)^4 \varphi_0, \quad (3.19)$$

т. е. согласно формуле (3.18) зависящая от ψ поправка в выражении для I остается порядка $(r/l)^4$ и при учете электрического поля.

Важный новый момент состоит в том, что теперь от r зависит уже и член I_0 [эта зависимость возникает через слагаемое $e\varphi_0(\mathcal{B}, r)$ в подкоренном выражении (3.17)]. Это приводит к изменению оценки (3.8) для δr . Теперь имеем:

$$\delta r \approx - \left. \frac{r^4 (I_2 - \langle I_2 \rangle) + \delta I_\varphi - \langle \delta I_\varphi \rangle}{\frac{\partial I_0}{\partial r} + 2r I_1} \right|_{r=r_*}. \quad (3.20)$$

Слагаемое $\partial I_0 / \partial r$ в знаменателе (3.20) становится преобладающим при

$$re \left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right| \gg \varepsilon \left(\frac{r}{l} \right)^2.$$

Если, как это часто бывает, $e|\partial\varphi_0/\partial r| \sim T/R$, где T — температура а R — радиус плазмы, то для частиц с $\varepsilon \sim T$ это условие выполняется автоматически. Оценивая грубо $\partial I_0/\partial r \sim I_0/R$, $I_2'' \sim I_0/l^4$, $\delta I_\varphi \sim \sim I_0(r/l)^4$, находим, что δr по порядку величины равно:

$$\frac{\delta r}{r_*} \sim \left(\frac{r_*}{l}\right)^4, \quad (3.21)$$

т. е. электрическое поле уменьшает «невложенность» дрейфовых оболочек.

Физически уменьшение радиальных отклонений частицы связано с тем, что рост поперечного электрического поля приводит к росту скорости электрического дрейфа в азимутальном направлении и соответственно к «сглаживанию» дрейфовых оболочек.

Учтем теперь возможность появления нескольких ветвей в зависимости $\varphi(B)$. Реально это означает, что теперь во всех формулах вместо функции $\varphi(B)$ будет стоять функция $\varphi(z)$, не обладающая, вообще говоря, симметрией функции $B(z)$. Ситуация с многозначностью функции $\varphi(B)$ встречается, в частности, в концевых пробкотронах амбиполярной ловушки, где имеются электроны и ионы «центральной» плазмы, захваченные между электростатическим потенциальным барьером, с одной стороны, и внутренней пробкой крайнего пробкотрона — с другой (см. рис. 5, б). Такие частицы совершают колебания в пределах «половинки» пробкотрона, и для них исчезает отмечавшаяся выше компенсация зависящих от ψ вкладов в I от противоположных пробок [порядка $(r/l)^2$]. По этой причине невложенность дрейфовых оболочек для таких частиц, вообще говоря, становится значительной.

3.3. Учет конечного давления плазмы. Давление плазмы вызывает искажение вакуумного магнитного поля и, как следствие, изменение формы дрейфовых оболочек. Возмущение магнитного поля в главном (нулевом) приближении по параксиальности определяется соотношением (2.34):

$$\delta B_z(r, z) = - \frac{4\pi p_\perp(r, z)}{\mathcal{B}(z)}$$

(пишем r вместо r_0). Отметим, что δB_z при записи в форме (2.34) представляет собой поправку к магнитному полю на невозмущенной магнитной поверхности.

Связанные с конечностью β возмущения r - и φ -составляющих магнитного поля имеют порядок $\beta r/l$, а учет следующих приближений по параксиальности в выражении для δB_z приводит к появлению поправки порядка $\beta(r/l)^2$ [см. (2.35), (2.36)]. Можно поэтому исходя из выражения (1.2) для I утверждать, что связанная с конечностью β поправка к I , которую мы будем обозначать δI_β , имеет следующую структуру:

$$\delta I_\beta \sim \beta [1 + O(r^2/l^2)]. \quad (3.22)$$

Первый член этого разложения находится очень просто. Для этого достаточно заменить в (1.2) B на $\mathcal{B}(z) + \delta B_z(r, z)$, а ds на dz и провести разложение по δB_z . Результат имеет вид:

$$\delta I_\beta(r, \varepsilon, \mu) = \frac{2\sqrt{2}\pi\mu}{\sqrt{m}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{p_\perp(r, z) dz}{\mathcal{B}(z) \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{C}(z) - e\varphi(r, z)}}. \quad (3.23)$$

В случае изотропного давления $p_\perp(r, z)$ заменяется на $p(r)^*$, а последнее может быть вынесено из-под интеграла, так что поправка δI_β приобретает особенно простой и универсальный вид.

Поправка (3.23) не зависит от угла ψ ; как функция радиуса она имеет масштаб изменения порядка радиуса плазмы. Производная $\partial \delta I_\beta / \partial r$ пропорциональна скорости градиентного дрейфа за счет неоднородности магнитного поля, связанной с присутствием плазмы. Величина δI_β уже при $\beta > (r/l)^2$ превышает аксиально-симметричный член $r^2 I_1(\varepsilon, \mu)$ [см. (3.5)], имеющийся в выражении для I в невозмущенном магнитном поле.

При анализе второго по параметру r/l приближения выявляется следующее важное обстоятельство: даже если функция p_\perp может быть записана в виде $p_\perp = p_\perp(r, B)$ во всей области удержания, в членах порядка $\beta (r/l)^2$ не происходит взаимного сокращения зависящих от ψ вкладов от противоположных пробок. Соответствующие вычисления отличаются большой громоздкостью и здесь не приводятся.

Появление в I зависящего от угла члена $\sim \beta (r/l)^2$ приведет, вообще говоря, к изменению величины $\delta\varphi$, введенной с помощью формулы (3.14). Рассуждения, вполне аналогичные тем, которые проводились в связи с формулой (3.19), показывают, что при $\beta \geq (r/l)^2$

$$\delta\varphi \sim \beta (r/l)^2.$$

3.4. Дрейфовые траектории. Суммируя результаты трех предыдущих параграфов и вводя обозначения, более удобные для дальнейшего, запишем I в виде

$$I(r, \psi, \varepsilon, \mu) = I_0(r, \varepsilon, \mu) + \delta I(r, \psi, \varepsilon, \mu), \quad (3.24)$$

причем будем считать, что

$$\langle \delta I \rangle = 0$$

(этого всегда можно добиться путем переопределения I_0). Под I_0 , в отличие от формул (3.5) и (3.16), понимаются теперь все не зависящие от ψ члены, какого бы происхождения они ни были. Величину I_0 можно представить как сумму трех слагаемых:

$$I_0 = I_{0V} + I_{0E} + I_{0P},$$

* Во избежание недоразумений напомним, что r означает здесь точку пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью ловушки ($r=r_0$).

где I_{0V} описывает дрейф частиц в вакуумном магнитном поле и определяется формулой, следующей из (3.16):

$$I_{0V} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \left[\sigma \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B} - e\varphi_0(\mathcal{B}, r)} - \frac{\delta \mathcal{B}}{2} \frac{\mu - e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathcal{B}}}{\sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B} - e\varphi_0(\mathcal{B}, r)}} \right] dz, \quad (3.25)$$

I_{0E} описывает электрический дрейф и определяется выражением (3.17)

$$I_{0E} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B} - e\varphi_0(\mathcal{B}, r)} dz, \quad (3.26)$$

а I_{0P} описывает градиентный дрейф, появляющийся из-за искажения вакуумного магнитного поля давлением плазмы,

$$I_{0P} = \frac{2\sqrt{2}\mu}{\sqrt{m}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{p_{\perp}(r, z) dz}{\mathcal{B}^2(z) \sqrt{\varepsilon - \mu \mathcal{B}(z) - e\varphi(r, z)}}. \quad (3.27)$$

Выражения (3.25)–(3.27) относятся к ионам. Для электронов достаточно заменить в них e на $-e$.

Уже при очень малом электрическом поле, $|\partial\varphi/\partial r| \geq (T/e)(R/l)^2$, и при очень малом β , $\beta \geq (R/l)^2$, каждое из слагаемых I_{0E} и I_{0P} становится больше I_{0V} , и радиальная зависимость I_0 определяется суммой слагаемых I_{0E} и I_{0P} .

В поправку δI также вносит вклад несколько слагаемых. При $\beta < (r/l)^2$ главное из них определяется формулой (3.7), а при $\beta > (r/l)^2$ главным становится член $\sim \beta (r/l)^2$ из (3.22). Оба этих слагаемых как функции угла ψ имеют период $\pi/2$. Если же система не обладает в точности симметрией (2.6) или если в ней присутствуют «юшмановские» частицы (см. разд. 2.2), то в δI появляется слагаемое с периодом π . Впрочем, ниже мы не рассматриваем этой возможности.

Имея в виду, что величина δI мала, введем малый параметр α , характеризующий эту малость:

$$\delta I \sim \alpha I_0. \quad (3.28)$$

Перейдем к рассмотрению собственно дрейфовых траекторий, под которыми мы будем понимать сечения дрейфовых оболочек плоскостью $z=0$, т. е. кривые $r=r(\psi, \varepsilon, \mu)$, определяемые уравнением $I(r, \psi, \varepsilon, \mu) = \text{const}$. Форму траекторий можно найти, разлагая I_0 в (3.24) по малому отклонению $\delta r = r_* - r$ (где $r_* = \langle r \rangle$) с точностью до членов первого порядка:

$$r(\psi, \varepsilon, \mu) = r_* - \frac{\delta I}{\partial I_0 / \partial r} \Big|_{r=r_*}. \quad (3.29)$$

Как следует из (3.29), траектории большинства частиц отклоняются от окружности на $\delta r \sim ar$.

Особого рассмотрения требует случай, когда $\partial I_0 / \partial r = 0$ и формула (3.29) становится неприменимой. Соотношение $\partial I_0 / \partial r = 0$ определяет в каждой точке r некоторую кривую на плоскости ϵ, μ . Пусть частица характеризуется в начальный момент координатами $r^{(1)}, \psi^{(1)}$ и имеет значения ϵ и μ , близкие к одной из точек упомянутой кривой, построенной для $r=r^{(1)}$. Вводя отклонение $x=r-r^{(1)}$ и разлагая I_0 по $\Delta\epsilon, \Delta\mu$ и x ($\Delta\epsilon$ и $\Delta\mu$ отсчитывают от ближайшей точки на кривой) с точностью до членов второго порядка малости, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} x^2 + \left[\frac{\partial^2 I_0}{\partial r \partial \mu} \Delta\mu + \frac{\partial^2 I_0}{\partial r \partial \epsilon} \Delta\epsilon \right] x + \delta I(\psi) - \delta I(\psi^{(1)}) = 0 \quad (3.30)$$

(аргументы $r^{(1)}, \epsilon, \mu$ в $I_0, \delta I$ и в производных I_0 для краткости опускаем). Форма траектории (3.30) существенно различна в зависимости от выражения, стоящего в квадратных скобках в (3.30).

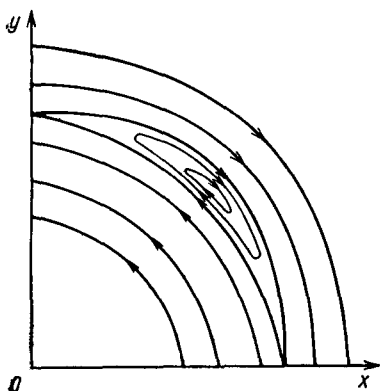


Рис. 10. Сечение дрейфовых оболочек плоскостью $z=0$. Каждая кривая соответствует одним и тем же значениям ϵ и μ , но разным значениям I . Стрелки указывают направление движения. Картина периодична с периодом $\pi/2$

именно однородный участок, и приближенно имеют место соотношения

$$I_{0E} \simeq L_0 \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\epsilon - \mu B_0 - e\varphi_0(r)}, \quad (3.31')$$

$$I_{0P} \simeq L_0 \frac{2\sqrt{2} \pi \mu p(r)}{\sqrt{m} B_0 \sqrt{\epsilon - \mu B_0 - e\varphi_0(r)}}, \quad (3.31'')$$

где L_0 — длина однородного участка, B_0 — напряженность ваку-

Если это выражение мало, то область движения частиц по углу ограничена («запертые» частицы), а траектории имеют характерную форму банана (рис. 10). Если же оно велико, то частицы обходят вокруг магнитной оси системы («пролетные» частицы).

Численные расчеты дрейфовых траекторий для ряда аксально-несимметричных открытых ловушек проведены в работах [14] и [24, 25].

Остановимся отдельно на важном случае, когда между двумя пробками имеется длинный участок однородного магнитного поля (модель центрального пробкотрона амбиполярной ловушки). При этом основной вклад в I_0 вносит

умного магнитного поля на этом участке. Условие $\partial I_0/\partial r=0$ сводится при этом к следующему:

$$\mu \frac{4\pi}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} - e \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \left(1 + \frac{\mu B_0}{\varepsilon - \mu B_0 - e\Phi_0} \frac{2\pi p}{B_0^2} \right) = 0.$$

Это условие выполняется для «тепловых» частиц, т. е. частиц с $\varepsilon \sim \mu B_0 \sim T$, при $e|\partial\Phi_0/\partial r| \sim \beta T/R$. Поэтому при $\beta \ll 1$ вторым слагаемым в круглых скобках можно пренебречь, и условие $\partial I_0/\partial r=0$ приобретает особенно простой вид:

$$\mu = \mu_*(r) \equiv \frac{e}{4\pi} \frac{B_0^2 (\partial\Phi_0/\partial r)}{\partial p/\partial r}. \quad (3.32)$$

Эта формула относится к ионам. Для электронов следует заменить в ней e на $-e$. Из (3.32) видно, что «банановые» траектории могут появиться одновременно только для одного сорта частиц [в зависимости от знака отношения $(\partial\Phi_0/\partial r)/(\partial p/\partial r)$].

Граница между пролетными и захваченными частицами определяется в данном случае отклонением μ от μ_* . При

$$\begin{aligned} |\Delta\mu| &= |\mu - \mu_*| > \Delta\mu_0 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{|\partial^2 I_0/\partial r \partial \mu|} \left\{ 2 \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \left[\max_{\psi} \delta I(\psi) - \min_{\psi} \delta I(\psi) \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

(для определенности считаем $\partial^2 I_0/\partial r^2 > 0$) частицы — пролетные, а при выполнении обратного неравенства — захваченные.

По порядку величины

$$\Delta\mu_0 \sim \alpha^{1/2} \mu_*.$$

Из этой оценки легко получается оценка для характерной ширины банана

$$\Delta x_b \sim \alpha^{1/2} R.$$

Обозначим время обхода вокруг магнитной оси для основной массы частиц (т. е. для частиц с $\Delta\mu/\mu \sim 1$) через τ_D (индекс D указывает на дрейфовое происхождение этого движения). При уменьшении $\Delta\mu$ время движения растет пропорционально $(\partial I_0/\partial r)^{-1}$, обращаясь в бесконечность на сепаратрисе, разделяющей пролетные и захваченные частицы. Для захваченных частиц, не слишком близких к сепаратрисе, период движения по банановой траектории по порядку величины равен $\alpha^{-1/2} \tau_D$. Вне сепаратрисы, при $\Delta\mu \gg \Delta\mu_0$, период движения частиц есть $\tau_D \mu/\Delta\mu$, а максимальное отклонение траектории от окружности — $\alpha R \mu/\Delta\mu$.

При наличии длинного участка справедливо следующее выражение для времени пролета частиц между пробками:

$$t_{\parallel} \approx \frac{L_0 \sqrt{\frac{m}{2}}}{V \varepsilon - \mu B_0 - e\Phi_0}. \quad (3.33)$$

3.5. Движение частиц в длинных ловушках. Как отмечалось в разд. 3.2, наличие электрического дрейфа приводит к тому, что угол $\Delta\psi$, на который проворачивается ведущий центр частицы за один пролет от пробки до пробки, линейно растет с длиной ловушки L . Линейно с L меняется также вклад в $\Delta\psi$ от градиентного дрейфа, связанного с искажением магнитного поля давлением плазмы. Поэтому при большой длине ловушки возможна ситуация, когда $\Delta\psi$ будет больше единицы, и описание движения частиц в терминах адиабатического инварианта I станет неадекватным. Реально эта возможность осуществляется для ионов в центральном пробкотроне амбиполярных ловушек. Для электронов, вследствие много меньшего значения t_{\parallel} (при сопоставимой с ионами скорости азимутального дрейфа), обычно выполняется условие $\Delta\psi \ll 1$.

Характерной особенностью центрального пробкотрона является наличие длинного отрезка однородного магнитного поля между пробками (см. рис. 5, б). Будем считать, что на этом отрезке электростатический потенциал и давление плазмы распределены аксиально-симметрично:

$$\varphi = \varphi_0(r), \quad p = p(r). \quad (3.34)$$

Движение частицы в рассматриваемом случае удобно описывать, фиксируя координаты $r_m, \psi_m, m=0, 1, 2, \dots$, точек последовательных пересечений траектории ее ведущего центра с экваториальной плоскостью ловушки. Закон движения при этом заключается в преобразовании, которое определяет значения r_m, ψ_m через их значения на предыдущем шаге r_{m-1}, ψ_{m-1} .

Изменение координаты r между двумя пересечениями экваториальной плоскости связано с прохождением частицей области аксиально-несимметричных пробок. Радиальное смещение Δr выражается через продольный адиабатический инвариант, вычисленный по «половинке» пробкотрона согласно формуле (3.9). Вклад в I_{\pm} от области однородного магнитного поля, где распределение потенциала и давления аксиально-симметрично, не зависит от ψ , поэтому при вычислении Δr_{\pm} достаточно учесть в I_{\pm} только вклад от области магнитной пробки. При этом в выражении (3.11), записанном без учета электрического поля, нужно заменить ϵ на $\epsilon - e\varphi_0(r)$. Учет же искажения вакуумного магнитного поля пробок при $\beta \ll 1$ дает лишь малую ($\sim \beta$) поправку к Δr_{\pm} , поэтому им можно пренебречь. В результате получим, что $\Delta r_{\pm} = \pm \Delta r$, где

$$\Delta r \equiv - \frac{2mcr}{eB_0} I_1^*(r, \epsilon, \mu) \sin 2\psi, \quad (3.35)$$

а $I_1^*(r, \epsilon, \mu)$ дается формулой (3.12), в которой интегрирование ведется по области неоднородного магнитного поля (и вместо ϵ стоит $\epsilon - e\varphi_0$). В (3.35) в качестве магнитного поля в экваториальной плоскости подставлено значение B_0 на однородном участке

пробкотрона. При использовании формулы (3.35) мы подразумеваем, что длина самих пробок не очень велика (как это и бывает всегда в реальных установках), так что изменение угла ψ при отражении от пробки мало по сравнению с единицей.

В случае непараксиальных магнитных полей, вследствие симметрии (3.10) функций I_+ и I_- , выражения для Δr_{\pm} можно записать в следующем виде:

$$\Delta r_{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k a_k(r, \varepsilon, \mu) \sin 2k\psi. \quad (3.36)$$

В дальнейшем коэффициент a_1 , равный множителю перед $\sin 2\psi$ в формуле (3.35), будем называть функцией отражения, опуская индекс при его записи, $a_1 \rightarrow a$, и использовать для Δr_{\pm} параксиальное приближение (3.35), записывая

$$\Delta r_{\pm} = \pm a \sin 2\psi. \quad (3.37)$$

По порядку величины [см. (3.13)]

$$a \sim r_H \frac{R}{l}.$$

Выведем теперь преобразование для r_m , ψ_m , о котором говорилось выше. При этом фактически удобно фиксировать только такие пролеты, когда частица пересекает экваториальную плоскость, двигаясь в положительном направлении вдоль оси z (т. е. через время $2t_{\parallel}$).

Пусть в начальный момент частица с $v_z > 0$ находится в экваториальной плоскости в точке r_1 , ψ_1 . Тогда, пролетев половину пробкотрона и имея фазу $\psi_1 + \frac{1}{2}\Delta\psi$, она влетит в первую пробку и испытает радиальное смещение, равное $a \sin(2\psi_1 + \Delta\psi)$. Затем, пролетев вдоль однородной части, она влетит во вторую пробку, имея фазу $\psi_1 + \frac{3}{2}\Delta\psi$, и сместится по радиусу на величину $-a \sin(2\psi_1 + 3\Delta\psi)$. Наконец, преодолев еще половину длины пробкотрона, она достигнет экваториальной плоскости, при этом ее фаза возрастет на $\frac{1}{2}\Delta\psi$. В результате координаты новой точки пересечения r_2 , ψ_2 будут иметь вид:

$$r_2 = r_1 + a(r_1) \sin[2\psi_1 + \Delta\psi(r_1)] - a(r_1) \sin[2\psi_1 + 3\Delta\psi(r_1)] + O(a^2), \quad (3.38)$$

$$\psi_2 = \psi_1 + 2\Delta\psi(r_1) + O(a) \quad (3.39)$$

(аргументы ε и μ в a и $\Delta\psi$ для краткости опускаем).

Если величина $\Delta\psi$ не удовлетворяет никаким специальным условиям, то при последовательных отражениях от пробок частица

испытывает более или менее случайные смещения в ту и в другую сторону по радиусу* на величину $\sim a$ и результирующее радиальное смещение мало (порядка a). Это утверждение несправедливо только для специальных групп частиц, которые называются «резонансными» [15] и для которых $\Delta\psi$ близко к нечетному числу прямых углов:

$$\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu) = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad |\alpha| \ll 1, \quad (3.40)$$

где k — целое число. Условие (3.40) соответствует тому, что после отражения от одной пробки частица подходит к другой в геометрически эквивалентной точке и радиальные смещения от последовательных отражений складываются**.

Так как $\Delta\psi$ зависит от r , то при заданных ε и μ условие (3.40) может выполняться только вблизи определенных дискретных значений $r = R_k(\varepsilon, \mu)$, определяемых из условия

$$\Delta\psi(R_k, \varepsilon, \mu) = \frac{\pi}{2} (2k + 1). \quad (3.41)$$

Поэтому из сказанного выше не следует, что резонансная частица движется непрерывно по радиусу в одном направлении: уход от резонансного значения r приводит к нарушению условия (3.40) и, вообще говоря, к изменению направления движения.

Из условия (3.40) видно, что если отмечать точки пересечения резонансной частицей экваториальной плоскости через $4t_{\parallel}$, то возникает квазинепрерывная траектория. Преобразование, определяющее положение соседних точек на этой траектории, очевидно, имеет вид:

$$r_{m+2} - r_m = 4(-1)^k a \cos 2\psi_m, \quad (3.42)$$

$$\psi_{m+2} - \psi_m = 4 \left[\Delta\psi - \frac{\pi}{2} (2k + 1) \right]. \quad (3.43)$$

Несущественное слагаемое 2π в правой части последнего равенства опускаем. Для дальнейшего удобно ввести (малое) отклонение частицы от резонансной поверхности (3.41):

$$x = r - R_k(\varepsilon, \mu).$$

Соотношение (3.40) при этом записывается как

$$\Delta\psi - \frac{\pi}{2} (2k + 1) = x \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}.$$

Левые части уравнений (3.42), (3.43) определяют изменение положения частицы в экваториальной плоскости за время $4t_{\parallel}$. Деля соотношения (3.42), (3.43) на $4t_{\parallel}$ и переходя в левых частях

* Точнее см. ниже.

** В более общем случае, когда смещение дается формулой (3.36), условие резонанса записывается в виде $l\Delta\psi = (2k + 1)\pi/2$, где k и l — целые числа.

от конечных разностей к производным, находим уравнения движения частицы по резонансной траектории:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{t_{\parallel}} (-1)^k \cos 2\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{x}{t_{\parallel}} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}. \quad (3.44)$$

Интегрируя, находим, что форма траектории задается уравнением

$$\mathcal{Y} \equiv (-1)^k \frac{x^2}{a(R_h)} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \Big|_{r=R_h} - \sin 2\psi = \text{const.} \quad (3.45)$$

Значениям $|\mathcal{Y}| < 1$ соответствуют частицы, описывающие «банановые» траектории, а $|\mathcal{Y}| > 1$ — частицы, траектории которых охватывают магнитную ось системы (рис. 11).

С помощью (3.44) нетрудно оценить величину Δx_r радиальных блужданий резонансных частиц (т. е. частиц, для которых $|\mathcal{Y}| \sim 1$):

$$\Delta x_r \sim |a/(\partial \Delta\psi/\partial r)|^{1/2}, \quad (3.46)$$

и их период движения по траектории

$$\tau_r \sim t_{\parallel} \left| \frac{\Delta x_r}{a} \right| \sim t_{\parallel} \left| a \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \right|^{-1/2}. \quad (3.46)$$

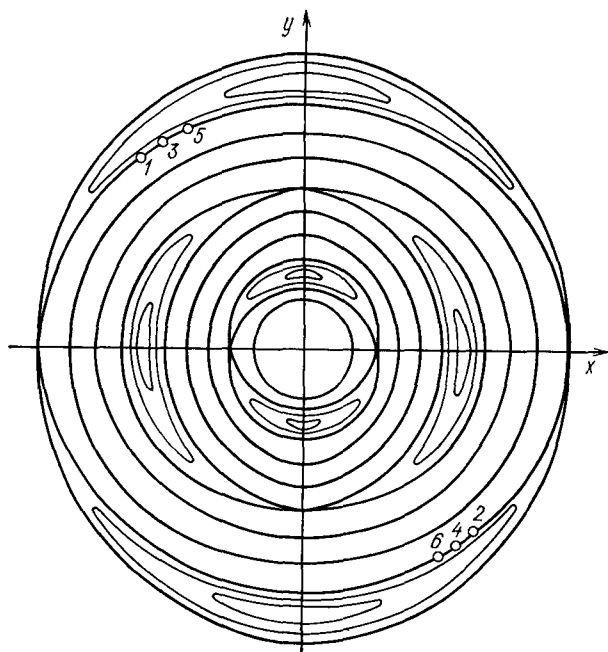


Рис. 11. Семейство резонансных траекторий в экваториальной плоскости. Показаны последовательные точки пересечения дрейфовой траектории частицы с экваториальной плоскостью через промежутки времени $2t_{\parallel}$

Очевидно, что расстояние между соседними резонансными поверхностями равно $\pi |\partial \Delta\psi / \partial r|^{-1}$ (считаем $\Delta\psi \geq 1$). Выше подразумевалось, что это расстояние велико по сравнению с шириной резонансных бананов Δx_r (см. рис. 11), т. е. выполнено условие

$$a |\partial \Delta\psi / \partial r| \ll 1. \quad (3.48)$$

При выполнении обратного неравенства резонансы перекрываются и возникает качественно новое явление — стохастическая диффузия. Она рассматривается в разд. 5.5.

Займемся теперь более подробным рассмотрением движения нерезонансных частиц, для которых $|\Delta\psi - (2k+1)\pi/2| \sim 1$ [по-прежнему предполагая справедливость (3.48)]. Мы покажем, что для них тоже можно ввести понятие плавной траектории, на которой лежат изображающие точки в плоскости r, ψ . Как будет видно из дальнейшего, величина радиальных блужданий этих частиц по порядку величины равна a , поэтому изменением $\Delta\psi(r, \epsilon, \mu)$, связанным с непостоянством r в ходе движения, можно пренебречь.

Будем последовательно выполнять преобразования (3.38), (3.39) и следить, как меняется расстояние между начальной точкой r_1, ψ_1 и конечной точкой r_n, ψ_n в зависимости от числа итераций n . Как уже отмечалось, величина $r_n - r_1 \sim a$ мала по сравнению с r . Что же касается разности $\psi_n - \psi_1$, то с точностью до слагаемого, кратного 2π , ее всегда можно сделать меньше наперед выбранного $\delta\psi_0$, если взять n достаточно большим. Для этого найдем такое m , что

$$\delta\psi \equiv |2m\Delta\psi - 2l\pi| < \delta\psi_0, \quad (3.49)$$

где l — целое *, и положим $n = m$.

В результате точки $(r_1, \psi_1), (r_{m+1}, \psi_{m+1}), (r_{2m+1}, \psi_{2m+1}) \dots$ будут располагаться в экваториальной плоскости рядом друг с другом и через них можно будет провести плавную кривую — траекторию нерезонансной частицы.

Переходя к построению определенной выше траектории, выполним преобразования (3.38), (3.39) m раз:

$$\left. \begin{aligned} r_{m+1} &= r_1 - a(r_1) \cos 2(\psi_1 + m\Delta\psi) \frac{\sin 2m\Delta\psi}{\cos \Delta\psi}, \\ \psi_{m+1} &= \psi_1 + 2m\Delta\psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Дифференциальные уравнения движения по траектории получаются, если воспользоваться (3.49) и учесть, что переход от одной точки к другой соответствует $2m$ пролетам пробкотрона, т. е.

* Нетрудно показать, что по крайней мере одно такое m существует уже среди чисел, меньших $2\pi/\delta\psi_0$.

происходит за время $2mt_{\parallel}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &\approx \frac{r_{m+1} - r_1}{2mt_{\parallel}} = \frac{-a \cos(2\psi_1 + \delta\psi) \sin \delta\psi}{2mt_{\parallel} \cos \Delta\psi} \approx \frac{-\delta\psi a \cos 2\psi_1}{2mt_{\parallel} \cos \Delta\psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &\approx \frac{\psi_{m+1} - \psi_1 - 2l\pi}{2mt_{\parallel}} = \frac{\delta\psi}{2mt_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} (3.51)$$

Форма траектории находится из уравнения

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\psi}} = \frac{-a}{\cos \Delta\psi} \cos 2\psi$$

и имеет вид

$$r(\psi) = -\frac{a}{2 \cos \Delta\psi} \sin 2\psi + \text{const.} \quad (3.52)$$

Как видно, введенные выше вспомогательные величины m и $\delta\psi$ выпали из окончательного результата (3.52).

Выше мы определили траекторию нерезонансных частиц как линию, проходящую через точки (r_1, ψ_1) , (r_{m+1}, ψ_{m+1}) , (r_{2m+1}, ψ_{2m+1}) ... Нетрудно, однако, проверить, что и промежуточные точки (с $n \neq pm$, где p — целое) лежат на этой траектории. Для этого, очевидно, достаточно убедиться в том, что если точка (r_1, ψ_1) находится на кривой (3.52), то и точка (r_2, ψ_2) , связанная с (r_1, ψ_1) преобразованием (3.50) с $m=1$, также лежит на этой кривой. Последнее действительно выполняется, поскольку, как следует из (3.52),

$$r(\psi_1 + 2\Delta\psi) = r_1 - 2a \cos 2(\psi_1 + \Delta\psi) \sin \Delta\psi.$$

Наконец, отметим, что в области, переходной между резонансными и нерезонансными частицами, когда α из формулы (3.40) заключено в интервале

$$\sqrt{\left| a \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \right|} \ll \alpha \ll 1,$$

обе формулы (3.45) и (3.52) дают одинаковый результат. Для проверки нужно, во-первых, учесть, что поскольку в этой области $|\mathcal{F}| \gg 1$, то x мало меняется вдоль траектории:

$$x(\psi) = x_0 + \delta x(\psi), \quad \delta x \ll x_0,$$

поэтому уравнение (3.45) принимает следующий вид:

$$(-1)^k \frac{2x_0}{a} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \delta x - \sin 2\psi = \text{const.} \quad (3.53)$$

Во-вторых, пользуясь малостью α , в (3.52) можно заменить $\cos \Delta\psi$ на $(-1)^{k+1} \alpha$ и учесть, что

$$\alpha \approx x \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}.$$

После этого уравнение (3.52) переходит в (3.53).

3.6. Уменьшение радиальных блужданий частиц с помощью специального выбора магнитного поля. Как отмечалось в § 1, одним из способов уменьшения поперечных потерь является такой выбор магнитного поля пробкотрона, который, сохраняя свойство « $\text{min } B$ », позволяет добиться минимального расхождения дрейфовых оболочек (о магнитном поле, в котором форма дрейфовых оболочек вообще не зависит от энергии и магнитного момента частицы, мы говорим как об обладающем свойством вложенности). Однако такая постановка задачи является адекватной только для коротких пробкотронов, где можно определить дрейфовые оболочки как поверхности постоянного значения I . При $\Delta\psi \geq 1$ это определение, вообще говоря, теряет смысл, так как адиабатический инвариант I не является более сохраняющейся величиной. Естественно поэтому обобщить понятие вложенности таким образом, чтобы оно исключало поперечный перенос, связанный с дрейфовым движением, и в случае $\Delta\psi \geq 1$. Для этого, очевидно, достаточно потребовать, чтобы ведущие центры частиц, находившихся в начальный момент на некоторой силовой линии, в процессе дрейфа оставались все время на поверхности, одной и той же для всех частиц, независимо от их энергии и магнитного момента. Такие поверхности (они, по определению, не могут пересекаться) будут являться поверхностями постоянного давления плазмы (в случае изотропной функции распределения), а невозможность частице попасть с одной поверхности на другую и означает отсутствие эффектов неоклассического и резонансного переноса. Условимся называть эти поверхности дрейфовыми, хотя теперь их определение никак не связано с сохранением I и, разумеется, относится только к магнитному полю, обладающему свойством вложенности (в указанном выше обобщенном смысле).

Выведем уравнение, которому должно удовлетворять такое поле [19, 26, 27]. Всюду ниже в этом разделе будем предполагать, что $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Как известно, в потенциальном магнитном поле частица дрейфует по направлению бинормали к силовой линии:

$$\mathbf{v}_D \sim [\mathbf{B} \nabla B]. \quad (3.54)$$

Условие вложенности заключается, очевидно, в том, что дрейфовая скорость \mathbf{v}_D и продольная составляющая скорости \mathbf{v}_{\parallel} должны лежать в плоскости, касательной к дрейфовой поверхности в данной точке; тогда ни дрейф, ни продольное движение не выводят частицу с поверхности. Введем в рассмотрение вектор кривизны силовой линии $\boldsymbol{\kappa}$, который в силу соотношения

$$\boldsymbol{\kappa} = B^{-3} [(\mathbf{B} \nabla B) \mathbf{B}] \quad (3.55)$$

перпендикулярен как \mathbf{v}_D , так и \mathbf{v}_{\parallel} . В искомом магнитном поле вектор $\boldsymbol{\kappa}$ должен быть направлен по нормали к дрейфовой поверхности. Если задавать последние уравнением

$$H(\mathbf{r}) = \text{const},$$

где $H(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат, то нормаль к дрейфовой поверхности коллинеарна вектору ∇H и условие вложенности принимает вид

$$\nabla H = \boldsymbol{\kappa} \frac{|\nabla H|}{|\boldsymbol{\kappa}|}. \quad (3.56)$$

Наконец, беря ротор от обеих частей этого уравнения и умножая результат скалярно на $\boldsymbol{\kappa}$, приходим к

$$\boldsymbol{\kappa} \operatorname{rot} \boldsymbol{\kappa} = 0. \quad (3.57)$$

Это и есть необходимое условие вложенности. Доказательство того, что оно является одновременно и достаточным, приведено в приложении 2. Подставляя в (3.57) выражение для $\boldsymbol{\kappa}$ (3.55), найдем, что в терминах магнитного поля \mathbf{B} оно принимает вид

$$[\mathbf{B} \nabla B] \nabla (\mathbf{B} \nabla B) = 0. \quad (3.5)$$

Другим способом это уравнение получено в работе [26].

Высокая степень нелинейности уравнения (3.58) не позволяет найти его общее решение, поэтому ограничимся ниже рассмотрением магнитных полей, обладающих свойством вложенности в параксиальном приближении. При этом удобно исходить из уравнения (3.57).

Пользуясь представлением (2.15), легко найти компоненты вектора кривизны силовой линии с точностью до членов $\sim (x/l)^2$, $(y/l)^2$:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= x_0 X'' = x \frac{X''}{X}; \\ \kappa_y &= y_0 Y'' = y \frac{Y''}{Y}; \\ \kappa_z &= -y_0^2 Y' Y'' - x_0^2 X' X'' = -x^2 \frac{X' X''}{X^2} - y^2 \frac{Y' Y''}{Y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Подставляя (3.59) в (3.57), получаем

$$\boldsymbol{\kappa} \operatorname{rot} \boldsymbol{\kappa} = \frac{xy}{X^2 Y^2} \left[Y Y'' \frac{d}{dz} (X X'') - X X'' \frac{d}{dz} (Y Y'') \right] = 0, \quad (3.60)$$

откуда сразу следует, что

$$X X'' = c Y Y'', \quad (3.61)$$

где c — константа. Это соотношение и является уравнением, определяющим класс магнитных полей квадрупольной симметрии, обладающих свойством вложенности в параксиальном приближении. Как видно, этот класс довольно широк: можно выбрать произвольную функцию $X(z)$ [удовлетворяющую только требованию $X(0) = 1$], константу c и начальное условие $Y'(0)$, после этого функция $Y(z)$ однозначно находится из уравнения (3.61) [с учетом второго начального условия $Y(0) = 1$].

Знак константы c в (3.61) имеет важное значение: он определяет, будут ли дрейфовые поверхности охватывать магнитную ось системы или нет. Для доказательства этого утверждения найдем сечение дрейфовой поверхности плоскостью $z = \text{const}$. Так как вектор нормали к дрейфовой поверхности параллелен \mathbf{x} , то форма сечения определяется из уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[\mathbf{e}_z]_x}{[\mathbf{e}_z]_y} = \frac{y}{x} \frac{Y''X}{X''Y}, \quad (3.62)$$

где \mathbf{e}_z — единичный орт, направленный вдоль оси z . Интегрируя уравнение (3.62) и пользуясь (3.61), получаем

$$c \frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = \text{const}. \quad (3.63)$$

Таким образом, при $c > 0$ сечения дрейфовых поверхностей образуют семейство вложенных друг в друга эллипсов, а при $c < 0$ — семейство гипербол. Разумеется, для удержания частиц вблизи оси ловушки приемлем только случай $c > 0$.

Приведем еще условие вложенности параксиального поля, записанное для функций \mathcal{B} и \mathcal{v} , ограничившись случаем $c > 0$. Подставляя в (3.61) выражения для X и Y (2.13), после простых преобразований найдем:

$$\left(-\frac{1}{2} \mathcal{B}'' \mathcal{B} + \frac{3}{4} (\mathcal{B}')^2 + 4\mathcal{v}^2 \right) \text{sh}(\Phi + c_1) + 2(\mathcal{B}\mathcal{v}' - 2\mathcal{v}\mathcal{B}') \text{ch}(\Phi + c_1) = 0, \quad (3.64)$$

где $c_1 = \frac{1}{2} \ln c$. Для $c_1 = 0$ (что соответствует круговым сечениям дрейфовых поверхностей в плоскости $z = 0$) это уравнение было получено в работе [28].

Очевидно, что при $c_1 = 0$ (круговые сечения) слагаемое, пропорциональное $\cos 2\Phi_0$, в выражениях (3.11) для I_{\pm} тождественно обращается в нуль. Соответственно расщепление поверхностей $I = \text{const}$ уменьшается от значения, даваемого формулой (3.13), до

$$\Delta r_{\pm} \sim r_H (r/l)^3. \quad (3.65)$$

Вместе с тем, так как отличие сечения этих поверхностей от окружностей определяется членом в I , пропорциональным r^4 , который, вообще говоря, не обращается в нуль в поле (3.64), то их невложенность остается по порядку величины равной $(r/l)^2$.

Пример численного расчета магнитной конфигурации (для амбиполярной ловушки) с помощью уравнения (3.64) можно найти в работе [29].

В заключение отметим еще одно достоинство магнитных полей, удовлетворяющих уравнению (3.58): в плазме, помещенной в такое поле, не генерируются продольные токи. Это может иметь практическое значение в длинных пробкотронах в связи с обсуж-

давшимися в п. 2.3 сильным искажением в них магнитных поверхностей. Для доказательства сформулированного утверждения необходимо проверить выполнение условия

$$\operatorname{div} j_{\perp} = 0. \quad (3.66)$$

Наиболее просто это сделать для изотропной плазмы (хотя само утверждение справедливо и в случае анизотропного давления). Так как согласно (2.31)

$$\operatorname{div} j_{\perp} = c \nabla p \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2} = -\nabla \frac{1}{B^2} [\nabla p \mathbf{B}] = B^2 j_{\perp} \nabla \frac{1}{B^2} = -2 j_{\perp} \kappa,$$

а в магнитном поле (3.58) вектор κ перпендикулярен магнитной поверхности, по касательной к которой направлен j_{\perp} , то выполнение (3.66) становится очевидным.

Все результаты, изложенные в этом параграфе, относились к случаю нулевого давления плазмы. Можно показать, что искажение вакуумного магнитного поля, удовлетворяющего условию (3.61), плазменными токами приводит, вообще говоря, к нарушению свойства вложенности, и при $\beta \geq (r/l)^2$ вместо оценки (3.65) становится справедливой оценка

$$\Delta r_{\pm} \sim \beta r_{\text{H}} \frac{r}{l}.$$

§ 4. Неоклассический перенос в открытых ловушках

4.1. Вывод кинетического уравнения и системы уравнений переноса. В этом разделе будет рассмотрена ситуация, когда обе компоненты плазмы в открытой ловушке (электроны и ионы) находятся в неоклассическом режиме переноса. Условимся отличать величины, относящиеся к различным компонентам, индексами e и i соответственно. Многие формулы этого раздела являются общими как для электронов, так и для ионов; в таких случаях индексы e и i опускаются.

В дальнейшем изложении, так же как и в предыдущих разделах, явно используется предположение о малости β плазмы.

Как правило, в открытых ловушках длина пробега частиц плазмы λ существенно превышает продольный размер пробкотрона. При учете этого обстоятельства быстрое движение частиц вдоль силовой линии приводит в неоклассическом режиме к фазовому размещиванию функции распределения по продольной координате и позволяет считать f не зависящей от ξ^3 :

$$f = f(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu, t).$$

Для простоты ниже будем предполагать, что распределение потенциала Юшманова (2.28) вдоль силовой линии имеет лишь один минимум, тогда f — однозначная функция своих аргументов. В общем случае, как обсуждалось в разд. 2.2, функция распре-

деления может иметь несколько ветвей, каждая из которых соответствует распределению частиц в локальной потенциальной яме.

Функция f подчиняется кинетическому уравнению, к выводу которого мы переходим. Прежде, однако, отметим, что выражения для усредненной вдоль силовой линии скорости дрейфа (3.1), выведенные в [23] применительно к случаю стационарных полей, остаются справедливыми, если электрическое поле медленно (по сравнению с t_{\parallel}) изменяется во времени, в то же время магнитное поле остается постоянным [30]. Именно такова ситуация в нашем случае, когда перераспределение плазмы по радиусу за счет диффузии приводит к изменению электрического потенциала, изменением же магнитного поля со временем, ввиду малого значения β плазмы, можно пренебречь.

Введем в рассмотрение функцию $g(\xi^1, \xi^2, \epsilon, \mu, t)$, такую, что $gd\xi^1 d\xi^2 d\epsilon d\mu$ равняется числу частиц в интервале $d\epsilon d\mu$, находящихся в силовой трубке, которая задается дифференциалами $d\xi^1, d\xi^2$. Площадь нормального сечения этой трубки $d\Sigma$ (как функция координаты ξ^3) равна

$$d\Sigma = \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} d\xi^1 d\xi^2. \quad (4.1)$$

Уравнение непрерывности для g имеет вид:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\xi^1 g) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\xi^2 g) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\bar{\epsilon} g) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{st}. \quad (4.2)$$

Здесь через $(\partial g / \partial t)_{st}$ обозначено изменение g , обусловленное кулоновскими столкновениями, а $\bar{\epsilon}$ обозначает усредненную по периоду скорость изменения полной энергии частицы:

$$\bar{\epsilon} = e \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

где

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{t_{\parallel}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|v_{\parallel}|} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4.4)$$

а e обозначает заряд частиц рассматриваемой компоненты. Обратим внимание на то, что величина $\partial \bar{\varphi} / \partial t$ зависит не только от координат и времени, но и от параметров ϵ и μ той частицы, вдоль траектории которой происходит усреднение.

Выразим теперь g через f . Число частиц, отнесенное к единице объема, в интервале $d\epsilon d\mu$

$$dn = 2 \frac{2\pi B}{m^2} f \frac{d\epsilon d\mu}{|v_{\parallel}|}. \quad (4.5)$$

Дополнительный множитель 2 в выражении (4.5) появляется из-за того, что одному набору значений ϵ, μ соответствуют две точки

в плоскости v_{\perp} , v_{\parallel} , отличающиеся знаком v_{\parallel} . Чтобы установить связь g с f , проинтегрируем (4.5) по объему силовой трубки, пользуясь (4.1). В результате получим:

$$g = \frac{4\pi}{m^2} \int_{s_1}^{s_2} B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} f \frac{ds}{|v_{\parallel}|} = \frac{4\pi}{m^2} B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} f t_{\parallel}. \quad (4.6)$$

По смыслу величина $(\partial g / \partial t)_{St} d\xi^1 d\xi^2 d\epsilon d\mu$ равна изменению числа частиц вследствие столкновений в интервале $d\epsilon d\mu$ внутри силовой трубки $d\xi^1 d\xi^2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{St} d\xi^1 d\xi^2 d\epsilon d\mu &= \int \frac{4\pi B}{m^2} \frac{d\epsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} d\Sigma ds St f = \\ &= d\xi^1 d\xi^2 d\epsilon d\mu \frac{4\pi B}{m^2} \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|v_{\parallel}|} St f. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выражая теперь g и $(\partial g / \partial t)_{St}$ через f согласно (4.6), (4.7) и подставляя в (4.2) выражения для $\dot{\xi}^1$, $\dot{\xi}^2$, $\dot{\epsilon}$, получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\xi}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \dot{\xi}^2 \frac{\partial f}{\partial \xi^2} + e \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \overline{St f}, \quad (4.8)$$

где черта над $St f$ обозначает, как и в (4.4), операцию усреднения вдоль силовой линии. При выводе (4.8) нужно учесть легко приемлемое соотношение:

$$\frac{\partial t_{\parallel}}{\partial t} = - \frac{\partial (t_{\parallel} \bar{\epsilon})}{\partial \epsilon}.$$

Учтем теперь явно, что мы рассматриваем магнитную конфигурацию, для которой невлоченность дрейфовых поверхностей мала. Математически это обстоятельство отражается, очевидно, в том, что при некотором выборе криволинейных координат ξ^1 , ξ^2 продольный адиабатический инвариант представляется в виде

$$I(\xi^1, \xi^2, \epsilon, \mu) = I_0(\xi^1, \epsilon, \mu) + \delta I(\xi^1, \xi^2, \epsilon, \mu), \quad \delta I \ll I_0. \quad (4.9)$$

Как следует из результатов § 3, в качестве ξ^1 можно выбрать расстояние от силовой линии до оси в экваториальной плоскости, однако при выводе общих соотношений удобно не фиксировать заранее выбор координат ξ^1 , ξ^2 . Условимся только, что ξ^2 играет роль угловой переменной, изменяясь на 2π при обходе магнитной оси, тогда разбиение (4.9) можно сделать однозначным (в данных координатах), потребовав:

$$I_0 = \langle I \rangle, \quad \delta I = I - I_0, \quad (4.10)$$

где угловые скобки означают усреднение по ξ^2 :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi^2 \dots \quad (4.11)$$

Будем называть магнитными поверхностями поверхности $\xi^1 = \text{const}$; в силу (4.9) отличие дрейфовых оболочек от магнитных поверхностей мало. Заметим сразу, что выбор определенных таким образом магнитных поверхностей неоднозначен [например, можно совершить преобразование $\xi^1 \rightarrow \xi^1(1 + \zeta(\xi^1, \xi^2))$, которое не меняет порядка величины δI , если $\zeta \sim \delta I/I_0$]. В конкретном расчете этим произволом можно воспользоваться для упрощения вычислений.

Введем в рассмотрение величину N , равную отношению числа частиц, заключенных между двумя магнитными поверхностями ξ^1 и $\xi^1 + d\xi^1$, к дифференциалу $d\xi^1$:

$$N = 2\pi \left\langle \int_0^\infty d\mu \int_{\epsilon_{\text{мин}}}^\infty d\epsilon g \right\rangle = \frac{8\pi^2}{m^2} \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\epsilon d\mu f t_{\parallel} \right\rangle, \quad (4.12)$$

где $\epsilon_{\text{мин}} = \epsilon_{\text{мин}}(\xi^1, \xi^2)$ равно минимальному значению потенциала (2.28) на силовой линии (в дальнейшем, так же как в последнем интеграле, мы, как правило, не будем указывать пределы интегрирования по ϵ и μ). Кинетическая энергия этих частиц W , отнесенная к $d\xi^1$, выражается через функцию f следующим образом:

$$W = \frac{8\pi^2}{m^2} \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\epsilon d\mu f t_{\parallel} (\epsilon - e\bar{\varphi}) \right\rangle. \quad (4.13)$$

Из кинетического уравнения (4.8) [при учете соотношений (3.1)] получаются следующие уравнения баланса для N и W (см. приложение 3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^1} q &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^1} Q &= S + \dot{W}_{\text{ад}} + \dot{W}_{\text{ст}} + \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Здесь

$$q \equiv \frac{8\pi^2 c}{me} \left\langle \int d\epsilon d\mu f \frac{\partial I}{\partial \xi^2} \right\rangle \quad (4.15)$$

и

$$Q \equiv \frac{8\pi^2 c}{me} \left\langle \int d\epsilon d\mu \frac{\partial I}{\partial \xi^2} f (\epsilon - e\bar{\varphi}) \right\rangle \quad (4.16)$$

имеют смысл потока частиц и энергии, а

$$S = - \frac{8\pi^2 e}{m^2} \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\epsilon d\mu f t_{\parallel} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^1} \xi^1 + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} \xi^2 \right) \right\rangle \quad (4.17)$$

— источник, связанный с работой электрического поля над частицами*. Γ обозначает скорость изменения внутренней энергии рассматриваемой компоненты плазмы за счет столкновений с частицами другой компоненты, а смысл членов $\dot{W}_{ад}$ и \dot{W}_{St} объяснен в приложении 3.

В дальнейшем нам понадобится утверждение, что любая функция распределения f , зависящая только от интегралов движения I , ε , μ , $f = F(I, \varepsilon, \mu)$, обращает поток частиц (4.15) в нуль. Его доказательство легко получить, если заметить, что

$$\left\langle F \frac{\partial I}{\partial \xi^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^2} \int F dI \right\rangle = 0.$$

Что же касается потока (4.16), то он при этом обращается в нуль, если усредненный потенциал $\bar{\varphi}$ постоянен на магнитных поверхностях, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\xi^1, \varepsilon, \mu)$, что справедливо, вообще говоря, только в пренебрежении невложенностью дрейфовых поверхностей (см. ниже). Отметим еще, что для функции интегралов движения, как показывает прямая проверка, источник S совпадает с величиной $\partial Q / \partial \xi^1$. Последнее является совершенно очевидным и соответствует тому факту, что в отсутствие столкновений ($\Gamma = \dot{W}_{St} = 0$) и в стационарном потенциале ($\dot{W}_{ад} = 0$) любая функция интегралов движения является решением кинетического уравнения и отвечает постоянному значению W .

Так как в системах с малой невложенностью дрейфовых оболочек время диффузии плазмы велико по сравнению со временем столкновения, то при решении кинетического уравнения можно воспользоваться локально максвелловским приближением, т. е. считать, что

$$f = f_M + \delta f, \quad (4.18)$$

где

$$f_M = n_*(\xi^1, t) \left[\frac{2\pi}{m} T(\xi^1, t) \right]^{-3/2} \exp \left[- \frac{\varepsilon}{T(\xi^1, t)} \right], \quad (4.19)$$

а $\delta f \ll f_M$.

Отметим сразу, что предположение о максвелловской функции распределения плазмы (4.19), строго говоря, неприменимо для амбиполярной ловушки, где в концевых пробкотронах имеются горячие анизотропные ионы, обеспечивающие продольное удержа-

* Здесь нужно сделать следующее замечание. В то время как поток q представляет собой число частиц, пересекающих магнитную поверхность в единицу времени, величина Q , в случае, когда потенциал φ меняется вдоль силовой линии, не есть кинетическая энергия, протекающая через магнитную поверхность за 1 с. Поскольку в уравнение баланса энергии S и Q входят в комбинации $S - \partial Q / \partial \xi^1$, то разделение последней на два слагаемых носит отчасти условный характер: часть членов из Q всегда может быть объединена с S , и наоборот, члены дивергентного вида в S могут быть перенесены в Q .

ние плазмы центрального пробкотрона. Чтобы отвлечься от особенностей продольного удержания в этом случае, будем предполагать, что плазма центрального пробкотрона ограничена в продольном направлении двумя поверхностями, расположенными в пробках и упруго отражающими достигающие их частицы. Примем также, что силовые линии пересекают эти поверхности в нормальном направлении.

Чтобы сделать разбиение (4.18) однозначным, будем требовать, чтобы поправка δf не вносила вклада в величины N и W :

$$\left\langle \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} B \int d\varepsilon d\mu \delta f t_{\parallel} \right\rangle = \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\varepsilon d\mu \delta f t_{\parallel} (\varepsilon - e\bar{\varphi}) \right\rangle = 0. \quad (4.20)$$

Что же касается потенциала φ , то, как обсуждалось в разд. 3.2, он должен определяться из условия квазинейтральности $n_e = n_i$. В пренебрежении отличием f от f_M имеем

$$n_{e,i} = n_{*e,i}(\xi^1) \exp[\pm e\varphi/T_{e,i}(\xi^1)] \quad (4.21)$$

(явную зависимость величин от времени здесь и в дальнейшем не указываем), и условие квазинейтральности приводит к требованию постоянства потенциала на магнитной поверхности

$$\varphi = \varphi_0(\xi^1).$$

В следующем приближении нужно учесть вклад поправок $\delta f_{e,i}$ в плотность электронов и ионов:

$$\delta n_{e,i} = \frac{4\pi B}{m_{e,i}^2} \int \frac{d\varepsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} \delta f_{e,i}, \quad (4.22)$$

тогда из условия квазинейтральности найдем, что

$$\varphi = \varphi_0(\xi^1) + \delta\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad (4.23)$$

где

$$\delta\varphi = \frac{T_i T_e}{ne(T_e + T_i)} (\delta n_i - \delta n_e). \quad (4.24)$$

Важно подчеркнуть здесь, что, в отличие от токамаков [9], диффузия в аксиально-несимметричных открытых ловушках не является автоматически амбиполярной. Условие амбиполярности выполняется только при определенном распределении потенциала φ_0 и служит уравнением, из которого должна находиться зависимость φ_0 от ξ^1 .

Малое отличие магнитных поверхностей от эквипотенциалей, следующее из представления (4.23), означает, что член $\dot{W}_{ад}$ в уравнении баланса энергии можно положить равным нулю. Нетрудно убедиться в этом и с помощью формального вычисления, подставив в формулу (ПЗ.4) в качестве φ функцию φ_0 , зависящую только от ξ^1 .

Возмущение потенциала $\delta\varphi$ вносит вклад δI_φ в слагаемое δI в (4.9), ответственное за расхождение дрейфовых поверхностей (см. разд. 3.2, 3.3). Выражение для δI_φ можно записать в следующем виде:

$$\delta I_\varphi = \int ds \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu B - e\varphi_0 - e\delta\varphi)} - \int ds \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu B - e\varphi_0)} = -\frac{e}{m} t_{\parallel} \overline{\delta\varphi}. \quad (4.25)$$

Подчеркнем, что решение задачи о переносе включает в себя в качестве составного элемента нахождение возмущения потенциала $\delta\varphi$ и вычисление поправки (4.25) к адиабатическому инварианту.

Подставим теперь соотношения (4.18), (4.22) в выражения (4.15)–(4.17). Учитывая малость величин δf , δI , $\delta\varphi$, достаточно ограничиться членами второго порядка (линейные члены обращаются в нуль):

$$q = \frac{8\pi^2 c}{me} \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta f \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} \right\rangle; \quad (4.26)$$

$$Q = \frac{8\pi^2 c}{me} \left\{ \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta f \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} (\varepsilon - e\varphi_0) \right\rangle + \left\langle e \int d\varepsilon d\mu \delta I f_M \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^2} \right\rangle \right\}; \quad (4.27)$$

$$S = -\frac{8\pi^2 c}{m} \left\{ \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta f \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi^1} \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial I_0}{\partial \xi^1} \right) \right\rangle + \left\langle \int d\varepsilon d\mu f_M \left(\frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^1} \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^2} \right) \right\rangle \right\}. \quad (4.28)$$

Теперь удобно переопределить величину Q^* , оставив только первое слагаемое в фигурных скобках в (4.27):

$$Q = \frac{8\pi^2 c}{me} \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta f \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} (\varepsilon - e\varphi_0) \right\rangle \quad (4.29)$$

и отнеса производную по ξ^1 от второго слагаемого в S . После интегрирования по частям выражение для S при этом принимает вид:

$$S = -\frac{8\pi^2 c}{m} \left\{ \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta f \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi^1} \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial I_0}{\partial \xi^1} \right) \right\rangle + \left\langle \int d\varepsilon d\mu \delta I \frac{\partial f_M}{\partial \xi^1} \frac{\partial \overline{\delta\varphi}}{\partial \xi^2} \right\rangle \right\}. \quad (4.30)$$

Входящая в выражения (4.26), (4.29), (4.30) поправка к функции распределения δf определяется из кинетического уравнения, которое получается из (4.8) в пренебрежении членами, пропор-

* См. сноску на с. 119.

циональными производным по времени, с учетом выражений (3.1), (4.9), (4.18):

$$\delta \dot{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} (f_M + \delta f) + \dot{\xi}_0^2 \frac{\partial \delta f}{\partial \xi^2} = \overline{\text{St } \delta f}, \quad (4.31)$$

где

$$\delta \dot{\xi}^1 = \frac{mc}{eBt_{\parallel}} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial \delta I}{\partial \xi^2}; \quad (4.32)$$

$$\dot{\xi}_0^2 = -\frac{mc}{eBt_{\parallel}} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial I_0}{\partial \xi^1}, \quad (4.33)$$

а $\text{St } \delta f$ обозначает линейризованный столкновительный член.

В заключение этого параграфа отметим, что изложенный выше вывод уравнений переноса, как и дальнейшие вычисления в этом разделе, фактически без изменений могут быть применены к задаче о неоклассической диффузии в системах типа BUMPY TORUS. Представление о характере расчетов в последнем случае можно составить по работам [31—33].

4.2. Задача переноса в модели длинного пробкотрона. Выведенная в предыдущем разделе система уравнений переноса и кинетическое уравнение для поправки к функции распределения заметно упрощаются для модели длинного пробкотрона. Отметим только, что мы будем считать давление плазмы достаточно малым, чтобы можно было пренебречь эффектами искажения магнитных поверхностей, описанными в разд. 2.3.

Условимся прежде всего о выборе криволинейных координат ξ^1, ξ^2 , задающих положение силовой линии. В качестве ξ^2 возьмем азимутальный угол в экваториальной плоскости лопушки, отсчитываемый от одной из плоскостей симметрии. Что же касается координаты ξ^1 , то ее удобно выбрать равной πr^2 (r — радиус в экваториальной плоскости). При этом величины N и W будут представлять собой соответственно усредненные по азимуту число частиц и энергию в силовой трубке единичной площади сечения. Имея в виду, что основной вклад в N и W вносит прямой участок длины L_0 , можно записать

$$N = nL_0, \quad W = \frac{3}{2} nTL_0,$$

где T — температура, входящая в максвелловскую функцию (4.19), а плотность n связана с величиной n_* соотношением $n = n_* \exp(-e\varphi_0/T)$.

Так как поправка к функции распределения δf не зависит от координаты ξ^3 , то на длинном участке пробкотрона, где магнитное поле однородно, возмущения плотности электронов и ионов не меняются вдоль силовой линии, соответственно δf не зависит здесь от координаты z :

$$\varphi = \varphi_0(r) + \delta \varphi(r, \psi) \quad (4.34)$$

{напомним, что Φ_0 является функцией магнитной поверхности, $\Phi_0 = \Phi_0(r)$].

Заметим теперь, что при операции усреднения вдоль силовой линии [см. формулу (4.4)] основной вклад в интеграл будет вносить длинная область однородного поля, где силовые линии прямые. Это означает, в частности, что $\overline{\delta\bar{\varphi}} \approx \delta\bar{\varphi}$, а $\overline{St\delta f} \approx St\delta f$. Последнее позволяет пренебречь членом $\overline{W_{St}}$ в уравнении баланса энергии (4.14) [см. (ПЗ.6)] и записать уравнения переноса в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{q}{2\pi r L_0} \right) &= 0; \\ \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} nT + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{Q}{2\pi r L_0} \right) &= \frac{S}{L_0} + \frac{\Gamma}{L_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Выражения в скобках обозначают потоки, отнесенные к единице площади.

Кинетическое уравнение (4.31) переписывается во введенных координатах в следующем виде:

$$u_r \frac{\partial}{\partial r} (f_M + \delta f) + u_\psi \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = St \delta f, \quad (4.36)$$

где u_r и u_ψ обозначают скорость изменения координат r и ψ :

$$u_r = \frac{mc}{reB_0 t_{\parallel}} \frac{\partial \delta I}{\partial \psi}, \quad (4.37')$$

$$u_\psi = - \frac{mc}{reB_0 t_{\parallel}} \frac{\partial I_0}{\partial r}, \quad (4.37'')$$

а B_0 — напряженность магнитного поля на однородном участке. Выражение для функции I_0 , входящей в (4.37''), приведено в разд. 3.4. Дополнительные условия (4.20), налагаемые на поправку δf , преобразуются к виду

$$\left\langle \int \frac{d\epsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} \delta f \right\rangle = \left\langle \int \frac{d\epsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} \delta f (\epsilon - \langle \Phi_0 \rangle) \right\rangle = 0. \quad (4.38)$$

Первое из них означает, что усредненное по азимуту возмущение плотности на однородной части пробкотрона равно нулю.

Примеры решения кинетического уравнения в различных режимах, отличающихся частотой столкновений, содержатся в следующих разделах этого параграфа. Для простоты мы приводим всюду только выражения для диффузионного потока частиц q .

4.3. Качественное рассмотрение. В этом разделе проведем классификацию разных режимов переноса и оценим коэффициент диффузии в зависимости от частоты столкновений ν .

Рассмотрим сначала случай, когда в ловушке имеются запертые частицы, описывающие банановые траектории (см. разд. 3.4) и обозначим $\Delta\mu$ разность $\mu - \mu_*(r)$, где r — радиус, на котором оценивается коэффициент диффузии. Пусть частота столкновений

мала настолько, что запертые частицы за время обхода своей траектории $\alpha^{-1/2}\tau_D$ не успевают испытать столкновение, которое переводит их в пролетные. Эта ситуация соответствует банановому режиму в теории процессов переноса в тороидальных машинах [34]. Учитывая, что эффективная частота таких столкновений $\nu_{\text{эф}} \sim \nu(\mu_*/\Delta\mu_0)^2 \sim \alpha^{-1}\nu$, получаем, что банановый режим реализуется при

$$\nu\tau_D \leq \alpha^{1/2}. \quad (4.39)$$

При этом вклад захваченных частиц в коэффициент диффузии оценивается как

$$\mathcal{D} \sim \Delta x_b^2 \nu_{\text{эф}} \frac{\Delta\mu_0}{\mu_*} \sim \alpha^{1/2} \nu R^2, \quad (4.40)$$

где множитель $\Delta\mu_0\mu_*$ учитывает малую долю таких частиц. Вклад в коэффициент диффузии пролетных частиц с $\Delta\mu \sim \mu_*$

$$\mathcal{D} \sim (\delta r)^2 \nu \sim \alpha^2 \nu R^2 \quad (4.41)$$

и мал по сравнению с (4.40). Таким образом, в банановом режиме скорость процессов переноса определяется частицами с магнитным моментом, лежащим в узкой окрестности ширины $\Delta\mu \sim \alpha^{1/2}\mu_*$ вблизи значения μ_* .

Область частот столкновений, где выполняются неравенства

$$\alpha^{3/2} \leq \nu\tau_D \leq 1, \quad (4.42)$$

является аналогом режима «плато» в тороидальных установках (см. [34]). В этом случае диффузия также определяется частицами с малым значением $\Delta\mu$. Это такие частицы, для которых обратное время обхода вокруг оси $\tau^{-1} \sim \tau_D^{-1}(\Delta\mu/\mu_*)$ сравнивается с эффективной частотой столкновений $\nu(\mu_*/\Delta\mu)^2$, т. е. $\Delta\mu/\mu_* \sim (\nu\tau_D)^{1/3}$. Для них расхождение дрейфовых поверхностей по порядку величины равно $\alpha R\mu_*/\Delta\mu$ и оценка коэффициента диффузии имеет вид:

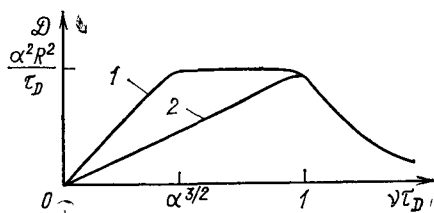
$$\mathcal{D} \sim \left(\alpha R \frac{\mu_*}{\Delta\mu}\right)^2 \nu \left(\frac{\mu_*}{\Delta\mu}\right)^2 \frac{\Delta\mu}{\mu_*} \sim \alpha^2 \frac{R^2}{\tau_D}. \quad (4.43)$$

Коэффициент диффузии (4.43) не зависит от частоты столкновений. Вклад в диффузию частиц с большими $\Delta\mu$ по-прежнему оценивается по формуле (4.41) и мал по сравнению с (4.43).

Наконец, при $\nu\tau_D \geq 1$ скорость диффузии определяется частицами с $\Delta\mu \sim \mu_*$. За время между столкновениями такая частица смещается по азимуту на угол $\sim (\nu\tau_D)^{-1}$ и, следовательно, уходит по радиусу на величину порядка $\delta r(\nu\tau_D)^{-1}$. Поэтому коэффициент диффузии оценивается здесь как

$$\mathcal{D} \sim \left(\frac{\delta r}{\nu\tau_D}\right)^2 \nu \sim \alpha^2 R^2 \frac{1}{\nu\tau_D^2}. \quad (4.44)$$

Рис. 12. Качественная зависимость коэффициента диффузии в неоклассическом режиме от частоты столкновений при наличии (1) и в отсутствие (2) запертых частиц



Описанная выше картина предполагает, что в плазме существуют запертые частицы.

Вообще говоря, что может быть и не так производная $\partial I_0 / \partial r$ может быть отлична от нуля при всех значениях ϵ и μ , либо обращается в нуль на «хвосте» максвелловского распределения, где число частиц экспоненциально мало. В такой ситуации коэффициент диффузии при $\nu \tau_D \leq 1$ необходимо оценивать по формуле (4.41). Этот режим мы будем называть режимом вращательной диффузии (в знак того, что основной вклад в \mathcal{D} вносят частицы, совершающие быстрое вращение вокруг магнитной оси).

Качественная зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений, построенная на основе проведенных выше оценок, приведена на рис. 12.

4.4. Режим вращательной диффузии. Наиболее просто вычисление потоков производится в режиме вращательной диффузии. Так как в силу условия $\nu \tau_D \ll 1$ столкновительный член в кинетическом уравнении (4.36) мал по сравнению со вторым слагаемым в левой части, то поправку к функции распределения δf можно искать, пользуясь теорией возмущений по малому параметру $\nu \tau_D$:

$$\delta f = \delta f^{(0)} + \delta f^{(1)} + \dots$$

В нулевом приближении в пренебрежении столкновениями кинетическому уравнению удовлетворяет любая функция интегралов движения частицы. Учитывая, что она должна мало отличаться от максвелловского распределения, выберем ее равной

$$\tilde{f}^{(0)} = n(r_*) \left[\frac{m}{2\pi T(r_*)} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{\epsilon - e\Phi_0(r_*)}{T(r_*)} \right], \quad (4.45)$$

где r_* — среднее значение радиуса r по траектории частицы, которое выражается через r , ψ , ϵ , μ следующим образом [см. (3.29)]:

$$r_* = r + \frac{\delta I}{\partial I_0 / \partial r}. \quad (4.46)$$

Поправка δf в этом приближении дается разностью $f^{(0)} - \tilde{f}_M$, которую, если воспользоваться разложением $\tilde{f}^{(0)}$ по малой разности $r_* - r$, можно записать в следующем виде:

$$\delta f^{(0)} = \frac{\delta I}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial \tilde{f}_M}{\partial r}, \quad (4.47)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{f}_M}{\partial r} = \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\epsilon - e\Phi_0}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] \tilde{f}_M. \quad (4.48)$$

Линейная по частоте столкновений поправка $\delta f^{(1)}$ находится из кинетического уравнения (4.36), в котором можно пренебречь малым слагаемым $u_r \partial \delta f^{(1)} / \partial r$:

$$u_\psi \frac{\partial \delta f^{(1)}}{\partial \psi} = \text{St} \delta f^{(0)}. \quad (4.49)$$

Интегрируя это уравнение по переменной ψ , получаем

$$\delta f^{(1)} = \int_0^\psi \frac{d\psi'}{u_\psi} \text{St} \left(\frac{\delta I(\psi')}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_M}{\partial r} \right). \quad (4.50)$$

Построенное решение обладает тем свойством, что функция δf удовлетворяет необходимым условиям (4.38).

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда азимутальный дрейф частиц определяется преимущественно электрическим полем, так что можно воспользоваться выражением (3.31') в качестве I_0 . При этом согласно (4.37'') находим

$$u_\psi = -c \frac{E}{rB_0}, \quad (4.51)$$

где $E \equiv \partial \phi_0 / \partial r$. Подставляя (4.50), (3.31'), (4.51) в (4.26), получаем выражение для диффузионного потока частиц во вращательном режиме:

$$q = \frac{8\pi^2 r B_0}{e^2 E^2 L_0} \left\langle \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) \int d\epsilon d\mu \delta I \text{St}(\delta I | v_{\parallel} | f_M) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \int d\epsilon d\mu \delta I \text{St} \left[\delta I f_M | v_{\parallel} | \left(\frac{e - e\phi_0}{T} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\rangle. \quad (4.52)$$

Обратимся теперь к вычислению возмущения потенциала $\delta\phi$. Для нахождения возмущения плотности на магнитной поверхности достаточно воспользоваться нулевым приближением $\delta f^{(0)}$:

$$\delta n = \frac{4\pi B_0}{m^2} \int \frac{d\epsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} \frac{\delta I}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_M}{\partial r}. \quad (4.53)$$

Подставляя сюда (3.31'), получаем, что в области однородного магнитного поля

$$\delta n = \frac{4\pi B_0}{emEL_0} \int d\epsilon d\mu \delta I \frac{\partial f_M}{\partial r}. \quad (4.54)$$

Вычисления, вынесенные в приложение 4, дают

$$\delta n = \frac{Tn}{eE} \left\{ \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\delta U}{U_0} - \frac{2e\delta\phi}{T} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\delta U}{U_0} + \frac{3}{2} \frac{e\delta\phi}{T} \right) \right\}, \quad (4.55)$$

где δU — разность $U - \langle U \rangle$, а $U_0 = L_0/B_0$. С помощью формулы (4.24) теперь находится возмущение потенциала $\delta\varphi$. Мы приведем выражение для него в случае, когда $T_e = T_i = T$:

$$\delta\varphi = -\frac{T^2}{e^2 E} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \frac{\delta U}{U_0}. \quad (4.56)$$

Найденное возмущение потенциала, входящее в слагаемое δI адиабатического инварианта, завершает расчет потока (4.52) во вращательном режиме.

4.5. Банановый режим. Имея в виду, что в открытой ловушке частицы, которые описывают банановые траектории, — это обычно ионы, мы проведем рассмотрение в следующих двух разделах для ионной компоненты, пренебрегая электрон-ионными столкновениями.

Как отмечалось в разд. 4.3, основной вклад в переиос в банановом режиме вносят частицы, значение магнитного момента которых близко к μ_* . Поэтому мы прежде всего будем искать поправку δf к функции распределения ионов в области фазового пространства, представляющей собой узкую (по μ) полосу, вытянутую вдоль оси ε , внутри которой расположена линия $\mu = \mu_*$. В окрестности этой линии δf меняется в 2 раза при изменении μ на малую величину порядка $\alpha^{1/2} \mu_*$ и в то же время плавно зависит от ε , $|\partial \ln \delta f / \partial \ln \varepsilon| \sim \sim 1$. Последнее обстоятельство позволяет упростить интеграл столкновений для рассматриваемой области фазового пространства, записав его в переменных ε , μ и сохранив только члены, содержащие два дифференцирования по μ (ср. соответствующие приближения в [35, 36]). При этом в коэффициенте перед второй производной по μ можно положить $\mu = \mu_*$. Результат имеет вид (см. приложение 5):

$$St \delta f = \nu(\varepsilon, r) \mu_*^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \mu^2}. \quad (4.57)$$

Здесь

$$\nu(\varepsilon, r) = \nu_0(r) G_1(\zeta, \chi), \quad (4.58)$$

причем частота столкновений ν_0 определяется формулой

$$\nu_0(r) = \frac{\sqrt{2} \pi n e^4}{m^{1/2} T^{3/2}} \Lambda,$$

а функция G_1 — формулой

$$G_1 = \frac{1}{\zeta \chi^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2\chi} \right) h + \frac{dh}{d\chi} \right] + \frac{h}{\chi^{5/2}},$$

где

$$h(\chi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi \sqrt{t} e^{-t} dt; \quad \chi = \frac{\varepsilon - e\varphi}{T}; \quad \zeta = \frac{\mu B}{\varepsilon - e\varphi - \mu B}.$$

С учетом (4.58) кинетическое уравнение (4.36) запишется в виде

$$u_r \frac{\partial f_M}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial \delta f}{\partial r} = \nu \mu_*^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \mu^2}. \quad (4.59)$$

Заметим, что два последних члена в левой части уравнения (4.59) имеют одинаковый порядок величины: хотя для запертых частиц $u_r \sim \alpha^{1/2} r u_\psi$, зато масштаб изменения δf по радиусу для них равен ширине «банана» $\alpha^{1/2} R$, так что $r(\partial\delta f/\partial r)_\mu \sim \alpha^{-1/2} \delta f \sim \alpha^{-1/2} \partial\delta f/\partial\psi$. Удобно ввести вместо μ новую переменную $\tilde{\mathcal{F}}(r, \psi, \varepsilon, \mu)$, которая так же как и μ являлась бы интегралом движения и вместе с тем значение $\tilde{\mathcal{F}}$ для запертых частиц, $\tilde{\mathcal{F}}(r, \psi, \varepsilon, \mu_*(r))$, при изменении r на величину порядка радиуса плазмы R оставалось бы почти постоянным (точнее, изменение $\tilde{\mathcal{F}}$ при этом не должно превышать по порядку величины $\alpha^{1/2} \tilde{\mathcal{F}}$). Тогда изменение r при постоянном $\tilde{\mathcal{F}}$ не выводило бы точку в фазовом пространстве из области запертых частиц, и поэтому было бы $r(\partial\delta f/\partial r)_{\tilde{\mathcal{F}}} \sim \delta f$. Если перейти от переменных $r, \psi, \varepsilon, \mu$ и $r, \psi, \varepsilon, \tilde{\mathcal{F}}$ (пользуясь условием постоянства $\tilde{\mathcal{F}}$ вдоль фазовой траектории $u_r \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial r + u_\psi \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial\psi = 0$) то можно будет пренебречь слагаемым $u_r(\partial\delta f/\partial r)_{\tilde{\mathcal{F}}}$ по сравнению с $u_\psi(\partial\delta f/\partial\psi)_{\tilde{\mathcal{F}}}$, и левая часть кинетического уравнения (4.59) примет вид:

$$u_r \frac{\partial f_M}{\partial r} + u_\psi \left(\frac{\partial \delta f}{\partial \psi} \right)_{\tilde{\mathcal{F}}}.$$

Мы определим переменную $\tilde{\mathcal{F}}$, удовлетворяющую отмеченным выше требованиям, следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{F}} = I(r, \psi, \varepsilon, \mu) - I(r_\mu, 0, \varepsilon, \mu), \quad (4.60)$$

где радиус r_μ находится из условия $\mu_*(r_\mu) = \mu$. В окрестности линии $\mu = \mu_*(r)$ величина r_μ мало отличается от r и может быть найдена из разложения

$$\mu - \mu_*(r) = (r_\mu - r) \frac{\partial \mu_*}{\partial r}, \quad (4.61)$$

где, как следует из определения $\frac{\partial I_0}{\partial r}(r, \varepsilon, \mu_*) = 0$,

$$\frac{\partial \mu_*}{\partial r} = - \frac{\partial^2 I_0 / \partial r^2}{\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r}. \quad (4.62)$$

Разлагая теперь I в (4.60) с точностью до членов второго порядка по малой разности $(r_\mu - r)$ и пользуясь (4.61), (4.62), нетрудно прийти к следующему соотношению:

$$\tilde{\mathcal{F}}(r, \psi, \varepsilon, \mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right)^2 [\mu - \mu_*(r)]^2 + \delta I(r, \psi) - \delta I(r, 0) \quad (4.63)$$

(для краткости мы не указываем значения аргументов ε, μ в δI).

Поскольку $\tilde{\mathcal{F}}$ отличается от I слагаемым, не зависящим от r и ψ [см. (4.60)], то скорость u_ψ выражается через $\tilde{\mathcal{F}}$ по формуле (4.37''), в которую вместо I_0 необходимо подставить $\tilde{\mathcal{F}}_0$. При этом, дифференцируя $\tilde{\mathcal{F}}_0$ по r , достаточно оставить производную только от $[\mu - \mu_*(r)]^2$; отброшенные члены будут малы по параметру $\alpha^{1/2}$:

$$u_\psi = - \frac{mc}{ert_{\parallel} B_0} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} [\mu - \mu_*(r)] = - 2\omega\sigma \sqrt{\tilde{\mathcal{F}} - y}. \quad (4.64)$$

В последнем выражении введены следующие обозначения:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1} \tilde{\mathcal{F}}; \quad (4.65)$$

$$y \equiv \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1} [\delta I(r, \psi) - \delta I(r, 0)]; \quad (4.66)$$

$$\omega \equiv \frac{mc}{2et_{\parallel} B_0} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2}; \quad (4.67)$$

$$\theta \equiv \frac{1}{r} \mu_*(r) \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1}; \quad (4.68)$$

$$\sigma \equiv \text{sign} \{ \theta [\mu - \mu_*(r)] \}.$$

Наконец, переходя в правой части кинетического уравнения (4.59) к переменной $\tilde{\mathcal{F}}$ (при этом в производных $\partial \tilde{\mathcal{F}} / \partial \mu$ также достаточно дифференцировать только $[\mu - \mu_*(r)]^2$), получаем

$$\left(\frac{\partial \delta f}{\partial \psi} \right)_{\mathcal{F}} = - \frac{2\sigma v \theta^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} \sqrt{\mathcal{F} - y} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathcal{F}} + \frac{\sigma r}{2\sqrt{\mathcal{F} - y}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial f_M}{\partial r}. \quad (4.69)$$

Так как функция y (4.66) периодична по ψ с периодом, равным $\pi/2$, достаточно рассмотреть изменение ψ в интервале $[-\pi/4, \pi/4]$.

Уравнение вида (4.69) встречается в разных задачах физики плазмы [34—37], и метод его решения хорошо известен. Поэтому ниже мы не останавливаемся на деталях вычислений.

Представим δf в виде ряда по малому параметру v :

$$\delta f = \delta f^{(0)} + \delta f^{(1)} + \dots$$

Нам потребуется только нулевой член разложения $\delta f^{(0)}$. Эта функция имеет различный вид для захваченных и пролетных частиц. Сепаратриса, разделяющая эти две области, определяется условием

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_c \equiv \max_{\psi} y(\psi).$$

Обозначая значения $\delta f^{(0)}$ при $\mathcal{F} < \mathcal{F}_c$ через δf_t , а при $\mathcal{F} > \mathcal{F}_c$ через δf_u и действуя, например, так же, как в [35—36], нетрудно получить

$$\delta f_t = - \sigma r \sqrt{\mathcal{F} - y} \frac{\partial f_M}{\partial r}, \quad (4.70)$$

$$\delta f_u = - \sigma r \left(\sqrt{\mathcal{F} - y} - \frac{\pi}{4} \int_{\mathcal{F}_c}^{\mathcal{F}} \frac{d\mathcal{F}'}{E(\mathcal{F}')} \right) \frac{\partial f_M}{\partial r},$$

где

$$E(\mathcal{F}) = \int_{-\pi/4}^{-\pi/4} d\psi \sqrt{\mathcal{F} - y(\psi)}. \quad (4.71)$$

Функция $\delta f^{(0)}$ непрерывна на сепаратрисе, в то время как ее производная терпит там разрыв. При $\mathcal{Y} \rightarrow \infty$ (т. е. $|\mu - \mu_*(r)| \gg \Delta\mu_0$, но $|\mu - \mu_*(r)| \ll \mu_*(r)$) δf_u стремится к конечному пределу, не зависящему от ψ :

$$\lim_{\mathcal{Y} \rightarrow \infty} \delta f_u(\mathcal{Y}, \psi) = \sigma \frac{\pi r}{4} \frac{\partial f_M}{\partial r} \left[\int_{\mathcal{Y}_c}^{\infty} d\mathcal{Y} \left(\frac{1}{E(\mathcal{Y})} - \frac{2}{\pi \mathcal{Y}^{1/2}} \right) - \frac{4}{\pi} \mathcal{Y}_c^{1/2} \right]. \quad (4.72)$$

Отметим, что по порядку величины $\delta f^{(0)}$ равна $\alpha^{1/2} f_M$.

Теперь мы можем вычислить поток q , обусловленный частицами из той области фазового пространства, для которой выше было решено кинетическое уравнение. Пользуясь формулой (4.26), выражение для q можно записать в следующем виде:

$$q = \frac{2\pi c r^2}{em} \int d\epsilon d\mu d\psi \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \delta f \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)_{r, \epsilon, \mu}, \quad (4.73)$$

где интегрирование по μ ведется в окрестности $|\mu - \mu_*(r)| \ll \mu_*$. С помощью соотношений (4.63), (4.65) заменим переменную интегрирования μ на \mathcal{Y} , при этом производную $(\partial y / \partial \psi)_{r, \epsilon, \mu}$ с нужной точностью можно положить равной $(\partial y / \partial \psi)_{r, \epsilon, \mathcal{Y}}$:

$$q = \frac{\pi c \mu_*}{em} \int d\epsilon d\psi \frac{\partial^2 I_0 / \partial r^2}{|\theta|} \sum_{\sigma} \int_y^{\infty} d\mathcal{Y} \delta f \frac{(\partial y / \partial \psi)_{r, \epsilon, \mathcal{Y}}}{\sqrt{\mathcal{Y} - y}}.$$

Выполняя теперь интегрирование по частям и пользуясь при этом уравнением (4.69), получаем

$$q = - \frac{8\pi^2 c \mu_* r^2}{em} \int d\epsilon \frac{v |\theta|}{\omega} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \times \\ \times \sum_{\sigma} \sigma \left\langle \int_y^{\infty} d\mathcal{Y} \sqrt{\mathcal{Y} - y} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left(\sqrt{\mathcal{Y} - y} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathcal{Y}} \right) \right\rangle.$$

Второй интеграл в этой формуле вычисляется элементарно и равен $-\frac{1}{2} \lim_{\mathcal{Y} \rightarrow \infty} \delta f$.

Пользуясь теперь соотношением (4.72) и подставляя выражения для ω , θ , $\partial f_M / \partial r$ в соответствии с (4.67), (4.68), (4.48), окончательное выражение для q запишем в следующем виде:

$$q = \frac{2\sqrt{2} \pi^3 \mu_*^2 r B_0 L_0}{m^{3/2}} \left\{ \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) \int_{\mu_* B_0 + e\Phi_0}^{\infty} d\epsilon v \gamma \left| \frac{\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r}{\partial^2 I_0 / \partial r^2} \right| \times \right. \\ \times \frac{f_M}{\sqrt{\epsilon - \mu_* B_0 - e\Phi_0}} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \int_{\mu_* B_0 + e\Phi_0}^{\infty} d\epsilon v \gamma \left| \frac{\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r}{\partial^2 I_0 / \partial r^2} \right| \left(\frac{\epsilon - e\Phi_0}{T} - \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \right) \frac{f_M}{\sqrt{\epsilon - \mu_* B_0 - e\Phi_0}} \right\}, \quad (4.74)$$

где $\gamma = \gamma(r, \varepsilon)$ обозначает содержимое квадратных скобок в формуле (4.72).

Чтобы завершить исследование бананового режима, нам осталось определить вклад частиц с $|\mu - \mu_*(r)| \gg \Delta\mu_0$ в диффузионные потоки. Нахождение поправки δf в этой области фазового пространства представляет собой гораздо более сложную задачу, поскольку здесь несправедливо приближение (4.57), и при решении кинетического уравнения необходимо использовать неупрощенный интеграл столкновений. К счастью, как мы сейчас покажем, эта область не дает вклада в диффузионные потоки, и, таким образом, формула (4.74) представляет собой окончательное выражение для скорости диффузии в банановом режиме.

В левой части кинетического уравнения (4.36) для частиц с $|\mu - \mu_*(r)| \gg \Delta\mu_0$ можно пренебречь $u_r \partial \delta f / \partial r$ по сравнению с двумя остальными членами, в результате получим

$$u_r \frac{\partial f_M}{\partial r} + u_\psi \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \text{St} \delta f. \quad (4.75)$$

Заметим, что так как искомая функция δf в области $\Delta\mu_0 \ll |\mu - \mu_*| \ll \mu_*$ должна сшиваться с найденной выше функцией $\delta f^{(0)}$, то по порядку величины $\delta f \sim \alpha^{1/2} f_M$. Поэтому второе слагаемое в левой части (4.75) в $\alpha^{-1/2}$ раз больше первого. Тем не менее мы удерживаем член $u_r \partial f_M / \partial r$, чтобы можно было определить δf с точностью до членов $\sim \alpha f_M$. Такая точность нужна для нахождения возмущения плотности δn (см. ниже).

Уравнение (4.75) можно решать следующим образом. Определим функцию g :

$$g \equiv - \int d\psi \frac{u_r}{u_\psi} \frac{\partial f_M}{\partial r} = \frac{\delta I}{\delta I_0 \partial r} \frac{\partial f_M}{\partial r} \quad (4.76)$$

и разность $h = \delta f - g$. Тогда из (4.75) имеем

$$u_\psi \frac{\partial h}{\partial \psi} = \text{St} (h + g).$$

Решение этого уравнения ищется в виде ряда по малой частоте столкновений ν :

$$h = h^{(0)} + h^{(1)} + \dots$$

В нулевом приближении $\partial h^{(0)} / \partial \psi = 0$, и, таким образом, функция $h^{(0)}$ не зависит от ψ . В следующем приближении

$$u_\psi \frac{\partial h^{(1)}}{\partial \psi} = \text{St} (h^{(0)} + g).$$

Условие разрешимости последнего уравнения получается усреднением обеих частей по азимуту

$$0 = \langle \text{St} (h^{(0)} + g) \rangle.$$

Учитывая, что $\langle g \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \text{St} g \rangle = 0$, а $h^{(0)}$ не зависит от ψ , приходим к уравнению для определения $h^{(0)}$:

$$\text{St} h^{(0)} = 0. \quad (4.77)$$

Для однозначного определения функции $h^{(0)}$ необходимо учесть еще ограничения на нее, возникающие из соотношений (4.38). Легко видеть что локализованная часть функции распределения (4.70) и добавка g не вносят вклада в интегралы (4.38). В самом деле, интегралы от $\delta f^{(0)}$ берутся по малой окрестности значения $\mu = \mu_*$, и при интегрировании по μ весовые множители перед $\delta f^{(0)}$ можно вынести из-под знака интеграла. В результате соотношения (4.38) для $\delta f^{(0)}$ выполняются тождественно, так как $\delta f^{(0)}$ является нечетной функцией переменной $\mu - \mu_*$, и

$$\int d\mu \delta f^{(0)} = 0. \quad (4.78)$$

Функция g также обращает (4.38) в тождества в силу того, что $\langle g \rangle = 0$. Таким образом, ограничения (4.38) сводятся к следующим условиям на $h^{(0)}$:

$$\int h^{(0)} t_{\parallel} d\epsilon d\mu = \int h^{(0)} t_{\parallel} (\epsilon - \epsilon_{\Phi 0}) d\epsilon d\mu = 0,$$

которые вместе с (4.77) и условием сшивки $h^{(0)}$ с $\delta f^{(0)}$ при $\Delta\mu_0 \ll |\mu - \mu_*| \ll \mu$ позволяют однозначно определить $h^{(0)}$.

Выразим теперь вклад в поток q от нелокализованной части функции распределения через интеграл столкновений от δf . Для этого подставим в (4.26) выражение для $\partial \delta f / \partial \psi$ из (4.75) и заметим, что при усреднении по ψ слагаемое, содержащее $\partial f_M / \partial r$, обратится в нуль. В результате получаем

$$q = - \frac{8\pi^2 cr}{em} \left\langle \int \frac{d\epsilon d\mu}{u_{\psi}} \delta I \text{St} \delta f \right\rangle.$$

Совместно с (4.77) это означает, что нелокализованная часть функции распределения $h^{(0)}$ не вносит вклада в потоки. Что же касается добавки g , то она обуславливает поток частиц, в $\alpha^{-2/2}$ меньше, чем (4.74) [см. оценку (4.41)].

В заключение этого параграфа укажем, что в банановом режиме, так же как и во вращательном, имеются возмущение плотности ионов и связанное с ним возмущение потенциала $\delta\phi$. Как уже отмечалось выше, в силу соотношения (4.77) функция $\delta f^{(0)}$ не дает вклада в δn , поэтому зависящее от азимута возмущение плотности связано с поправкой g . Последняя же совпадает с функцией δf^0 из вращательного режима. Таким образом, возмущение потенциала $\delta\phi$ в банановом режиме вычисляется так же, как и в разд. 4.4*.

4.6. Режим «плато». В этом и следующем разделах для простоты мы пренебрежем возмущением потенциала $\delta\phi$ при решении кинетического уравнения (что справедливо, например, при $T_e = 0$).

В режиме плато, как показывают простые оценки, в кинетическом уравнении можно пренебречь производной $\partial \delta f / \partial r$ по сравнению с остальными членами:

$$u_r \frac{\partial f_M}{\partial r} + u_{\psi} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \text{St} \delta f. \quad (4.79)$$

Как отмечалось в разд. 4.3, в режиме плато перенос определяется частицами с малыми значениями разности $\mu - \mu_*(r)$, для которых второе слагаемое в

* Возникающую при этом особенность в интеграле (4.53), связанную с обращением $\partial I_0 / \partial r$ в нуль, нужно понимать в смысле главного значения.

левой части (4.79) по порядку величины равно столкновительному члену. Для таких частиц можно упростить выражение для u_ψ :

$$u_\psi = -\frac{1}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial I_0}{\partial r} \simeq -\frac{\Delta\mu}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r}; \quad \Delta\mu \equiv \mu - \mu_*(r),$$

где $\omega_H = eB_0/mc$, производная $\partial^2 I_0/\partial\mu\partial r$ вычисляется в точке $\mu = \mu_*(r)$, а столкновительный член, так же как и в банановом режиме, можно взять в виде (4.57). Таким образом окончательное выражение для кинетического уравнения принимает вид:

$$\frac{1}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial\delta I}{\partial\psi} \frac{\partial f_M}{\partial r} - \frac{\Delta\mu}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r} \frac{\partial\delta f}{\partial\psi} = \nu\mu_*^2 \frac{\partial\delta f}{\partial\Delta\mu^2}. \quad (4.80)$$

Учитывая (3.3), запишем разложение δI в ряд Фурье:

$$\delta I = \sum_{k=1}^{\infty} I^{(k)}(r, \varepsilon, \mu) \cos 4k\psi. \quad (4.81)$$

Решение (4.80) будем искать в виде

$$\delta f = \sum_{k=1}^{\infty} (g_k \cos 4k\psi + h_k \sin 4k\psi). \quad (4.82)$$

Усреднение (4.82) по ψ дает нуль, поэтому такое решение удовлетворяет соотношениям (4.38). Подставляя (4.81) и (4.82) в (4.80), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{4k\Delta\mu}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r} g_k - \nu\mu_*^2 \frac{\partial^2 h_k}{\partial\Delta\mu^2} &= \frac{4kI^{(k)}}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial f_M}{\partial r}, \\ \frac{4k\Delta\mu}{r\omega_H t_\parallel} \frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r} h_k + \nu\mu_*^2 \frac{\partial^2 g_k}{\partial\Delta\mu^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.83)$$

В этих формулах значения $I^{(k)}$ вычисляются при $\mu = \mu_*(r)$.

Введение безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{g}_k \\ \tilde{h}_k \end{pmatrix} &= \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r} \right)^{1/3} \begin{pmatrix} r\omega_H \nu\mu_*^2 t_\parallel \\ 4k \end{pmatrix} \left(\frac{\partial f_M}{\partial r} \right)^{-1} \begin{pmatrix} g_k \\ h_k \end{pmatrix}, \\ \zeta &= \left(\frac{4k}{r\omega_H \nu\mu_*^2 t_\parallel} \frac{\partial^2 I_0}{\partial\mu\partial r} \right)^{1/3} \Delta\mu \end{aligned}$$

переводит (4.83) в следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}_k}{\partial\zeta^2} - \zeta \tilde{g}_k = -I^{(k)}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}_k}{\partial\zeta^2} + \zeta \tilde{h}_k = 0. \quad (4.84)$$

Граничные условия к системе (4.84), однозначно определяющие искомое решение, состоят в требовании $\tilde{g}_k, \tilde{h}_k \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Для решения (4.84) удобно, зафиксировав k , ввести комплексную переменную $v = (-i\tilde{h}_k + \tilde{g}_k)/I^{(k)}$. При этом система (4.84) преобразуется в уравнение

$$-i \frac{d^2 v}{d\zeta^2} + \zeta v = 1. \quad (4.85)$$

С помощью метода Лапласа нетрудно получить явное выражение для v ; оно приведено, например, в работе [38]. Нам потребуются только следующие свойства функции v (см. [38]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } v d\zeta = -\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } v d\zeta = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_k d\zeta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_k d\zeta = \pi I^{(k)}. \quad (4.86)$$

Отметим еще, что, как следует из системы (4.84), при $|\zeta| \gg 1$ [в размерных переменных при $\Delta\mu \gg \mu_*$ ($v\tau_D$)^{1/3}]

$$\tilde{g}_k = \frac{1}{\zeta} I^{(k)}.$$

Как легко проверить, это означает, что в области $\mu_*(v\tau_D)^{1/3} \ll |\Delta\mu| \ll \mu_*$ функция δf сшивается с поправкой к максвелловской функции распределения $\delta f^{(0)}$ из вращательного режима (см. разд. 4.4), которая в режиме плато описывает частицы с $\Delta\mu \gg \mu_*(v\tau_D)^{1/3}$.

При вычислении потока (4.26) необходимо учесть, что функция δf отлична от нуля только в узкой окрестности вблизи значения $\mu = \mu_*(r)$, поэтому при интегрировании по μ весовые множители в (4.26) можно считать постоянными. Формулы (4.86) позволяют при этом вычислить возникающие интегралы. Результат имеет вид:

$$q = -\frac{8\pi^2 B_0}{m^2 \omega_H L_0} \left\{ \left(\frac{1}{|n|} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\mu_* B_0 + e\varphi_0}^{\infty} d\epsilon f_M (I^{(k)})^2 \left| \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right|^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\mu_* B_0 + e\varphi_0}^{\infty} d\epsilon f_M \left(\frac{\epsilon - e\varphi_0}{T} - \frac{3}{2} \right) (I^{(k)})^2 \left| \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right|^{-1} \right\}. \quad (4.87)$$

4.7. Режим сильных столкновений. При $v\tau_D \gg 1$ решение кинетического уравнения (4.79) можно, как и в предыдущем параграфе, искать в виде (4.82). Подставляя (4.82), (4.81) в (4.79), получаем

$$-\frac{4k}{r\omega_H t_{\parallel}} I^{(k)} \frac{\partial f_M}{\partial r} - 4ku_{\psi} g_k = \text{St } h_k, \quad (4.88)$$

$$4ku_{\psi} h_k = \text{St } g_k. \quad (4.89)$$

Решение системы (4.88), (4.89) можно искать в виде ряда по малому параметру $(v\tau_D)^{-1}$. При этом в силу того, что поток частиц (4.26),

$$q = -\frac{8\pi^2 B_0}{m^2 \omega_H} \sum_{k=1}^{\infty} k \int d\epsilon d\mu I^{(k)} h_k, \quad (4.90)$$

как это следует из простых оценок разд. 4.3, пропорционален v^{-1} , нужно предположить, что разложение в ряд функций h_k начинается с членов первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} h_k &= h_k^{(1)} + h_k^{(2)} + \dots, \\ g_k &= g_k^{(0)} + g_k^{(1)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

[верхний индекс указывает степень параметра $(v\tau_D)^{-1}$].

Подставляя теперь разложения (4.91) в (4.89), получаем, что функция $g^{(0)}_k$ находится из уравнения

$$\text{St } g_k^{(0)} = 0 \quad (4.92)$$

и, следовательно (см., например, [39]),

$$g_k^{(0)} = \frac{\delta n}{n} f_M + \frac{v^2}{v_T^2} \frac{\delta T}{T} f_M, \quad (4.93)$$

где введены неопределенные пока константы δn и δT и тепловая скорость $v_T = \sqrt{2T/m}$. Решение (4.93) описывает азимутальные возмущения плотности и температуры, возникающие в ходе диффузии. Величины δn и δT определяются из системы линейных уравнений, которые получаются, если проинтегрировать (4.88) с весами 1 и v^2 :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r\omega_H} \int \frac{I^{(k)}}{t_{\parallel}} \frac{\partial f_M}{\partial r} d^3v &= \frac{\delta n}{n} \int u_{\psi} f_M d^3v + \frac{\delta T}{Tv_T^2} \int u_{\psi} v^2 f_M d^3v, \\ -\frac{1}{r\omega_H} \int \frac{v^2 I^{(k)}}{t_{\parallel}} \frac{\partial f_M}{\partial r} d^3v &= \frac{\delta n}{n} \int u_{\psi} v^2 f_M d^3v + \frac{\delta T}{Tv_T^2} \int u_{\psi} v^4 f_M d^3v. \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

Легко видеть, что по порядку величины

$$\frac{\delta n}{n} \sim \frac{\delta T}{T} \sim \frac{\delta r}{r}.$$

С помощью найденной таким образом $g^{(0)}_k$ функция $h^{(1)}_k$ определяется из уравнения (4.88):

$$-\frac{4k}{r\omega_H t_{\parallel}} I^{(k)} \frac{\partial f_M}{\partial r} - 4ku_{\psi} g_k^{(0)} = \text{St } h_k^{(1)}. \quad (4.95)$$

Для однозначного определения $h^{(1)}_k$ следует дополнить (4.95) условиями, возникающими при интегрировании уравнения (4.89) с весами 1 и v^2 :

$$\int u_{\psi} h_k^{(1)} d^3v = \int u_{\psi} v^2 h_k^{(1)} d^3v = 0.$$

Наконец, после того как получено $h^{(1)}_k$, вычисление потока q по формуле (4.90) решает поставленную задачу.

Проведение расчета по описанной выше схеме требует конкретизации зависимости от ϵ , μ функций $I^{(k)}$ и u_{ψ} и, по-видимому, невозможно без привлечения численных методов. Задача несколько упрощается при использовании модельного столкновительного члена Батнагара — Гросса — Крука [40]. Пример такого расчета можно найти в работе [41].

§ 5. Резонансный и стохастический перенос в открытых ловушках

5.1. Качественное рассмотрение. Прежде чем проводить вычисления коэффициентов резонансного переноса, дадим качественную классификацию возможных режимов и оценим величину коэффициента диффузии. Имея в виду, что резонансный режим реализуется для ионов в амбиполярной ловушке, в этом разделе мы, для конкретности, будем говорить об ионной компоненте.

Будем считать, что выполняется неравенство

$$\left| a \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \right| \ll 1, \quad (5.1)$$

тогда, как показано в разд. 3.5, радиальные блуждания запертых частиц Δx_r (3.46) велики по сравнению с радиальным дрейфовым смещением нерезонансных частиц, равным по порядку величины a . Как будет видно из дальнейшего, основной вклад в перенос в этом случае вносят именно резонансные частицы. Рассмотрению ситуации, когда выполняется неравенство, обратное (5.1), посвящен разд. 5.5.

В плоскости переменных ε , μ резонансным частицам на данном радиусе r соответствуют окрестности некоторых кривых, которые ниже называются резонансными; они находятся из уравнения

$$\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu) = (2k + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (5.2)$$

Ширина окрестности $\Delta\mu_r$ вдоль оси μ и $\Delta\varepsilon_r$ вдоль оси ε определяется тем условием, что изменение магнитного момента частицы на $\Delta\mu_r$ или ее энергии на $\Delta\varepsilon_r$ приводит к смещению по $\Delta\psi$ на ширину резонанса, равную $|a\partial\Delta\psi/\partial r|^{1/2}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\mu_r}{\mu} &\sim \frac{1}{\mu} \left| \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mu} \right|^{-1} \left| a \frac{\partial\Delta\psi}{\partial r} \right|^{1/2} \sim \sqrt{\frac{|a|}{R\Delta\psi}}, \\ \frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon} &\sim \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\varepsilon} \right|^{-1} \left| a \frac{\partial\Delta\psi}{\partial r} \right|^{1/2} \sim \sqrt{\frac{|a|}{R\Delta\psi}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Для грубых оценок в (5.3) мы ввели некоторое характерное значение $\Delta\psi$ и предположили, что функция $\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$ плавно зависит от ε и μ в существенной области ее изменения: $|\partial\Delta\psi/\partial\mu| \sim \Delta\psi/\mu$, $|\partial\Delta\psi/\partial\varepsilon| \sim \Delta\psi/\varepsilon$. С помощью (5.3) находим, что эффективная частота столкновений для резонансных частиц, равная по порядку величины обратному времени пребывания внутри резонансной полосы, имеет вид:

$$\nu_{\text{эф}} \sim \nu_i \left(\frac{\mu}{\Delta\mu_r} \right)^2,$$

где ν_i — обратное время рассеяния ионов на угол порядка единицы.

Оценки коэффициента диффузии ионов зависят от соотношения между $v_{эф}$ и периодом движения резонансной частицы τ_r . Случай, когда $v_{эф} \lesssim \tau_r^{-1}$, является аналогом бананового режима неоклассической теории. Вклад в коэффициент диффузии от одной резонансной кривой при этом равен

$$(\Delta x_r)^2 v_{эф} \frac{\Delta \mu_r}{\mu}$$

(последний множитель учитывает малую долю запертых частиц). Это выражение нужно умножить на число резонансных кривых N_{res} , учитывающее возможность различных значений k в формуле (5.2). По порядку величины

$$N_{res} \sim \Delta \psi / \pi.$$

С помощью (5.3) теперь получаем оценку коэффициента диффузии

$$\mathcal{D} \sim v_i R^2 \left| a \frac{\Delta \psi}{R} \right|^{1/2}. \quad (5.4)$$

Обратный предельный случай $\tau_r^{-1} \lesssim v_{эф}$ является аналогом режима плато неоклассической теории переноса. Диффузия в этом режиме определяется частицами с таким значением $\Delta \mu$ ($\Delta \mu \gg \Delta \mu_r$), для которых время обхода по траектории τ сравнивается с обратной эффективной частотой столкновений $\tilde{v}_{эф}^{-1} \sim v_i^{-1} (\Delta \mu / \mu)^2$. Время τ и величина радиального блуждания Δx частиц с $\Delta \mu \gg \Delta \mu_r$ (но $\Delta \mu \ll \mu$) по-прежнему оцениваются с помощью (3.44). Нужно только учесть, что для частиц, у которых магнитный момент отличается от резонансного значения μ на данном радиусе r (при фиксированном ϵ) на величину $\Delta \mu$, резонансное значение R_k смещено от r на расстояние $x \sim \Delta \mu (\partial \Delta \psi / \partial \mu) (\partial \Delta \psi / \partial r)^{-1}$. Поэтому

$$\tau \sim t_{\parallel} \frac{\mu}{\Delta \mu \Delta \psi}, \quad \Delta x \sim \frac{a \mu}{\Delta \mu \Delta \psi}. \quad (5.5)$$

Из условия $\tau \sim \tilde{v}_{эф}^{-1}$ находим, что

$$\Delta \mu \sim \mu \left| \frac{v_i t_{\parallel}}{\Delta \psi} \right|^{1/2}. \quad (5.6)$$

Оценивая теперь коэффициент диффузии как $\mathcal{D} \sim N_{res} (\Delta x)^2 \tilde{v}_{эф} \Delta \mu / \mu$, получаем

$$\mathcal{D} \sim a^2 / t_{\parallel}. \quad (5.7)$$

Дальнейшее увеличение частоты столкновений приводит к нарушению условий применимости режима плато. Оно связано с тем, что ширина области (5.6), в которой находятся частицы, осуществляющие перенос, сравнивается с расстоянием между резонансными кривыми $\Delta \mu$, равным

$$\Delta \mu \sim \frac{\pi}{\partial \Delta \psi / \partial \mu}.$$

Это происходит, когда

$$v_t \geq t_{\parallel}^{-1} \left(\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \mu} \right)^{-2} \sim \frac{1}{t_{\parallel} (\Delta \psi)^2}. \quad (5.8)$$

Обсуждение ситуации при большей частоте столкновений содержится в разд. 5.5.

5.2. Вычисление диффузионного потока. Прежде всего отметим, что в отличие от неоклассических режимов в резонансном режиме функция распределения ионов в экваториальной плоскости зависит не только от переменных $r, \psi, \varepsilon, \mu$, но и от знака z -компоненты скорости частицы. Мы будем отличать частицы с разным знаком v_z дискретной переменной $\sigma = \text{sign } v_z$. Например, там, где это необходимо, зависимость f от σ будет обозначаться индексом: $f_{\sigma}(r, \psi, z, \varepsilon, \mu)$.

Кинетическое уравнение для нахождения функции распределения ведущих центров в экваториальной плоскости получается из стационарного дрейфового кинетического уравнения со столкновительным членом:

$$v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial s} + v_D \nabla f = S t f, \quad (5.9)$$

где v_{\parallel} и v_D — продольная и дрейфовая скорости частицы. Поделим уравнение (5.9) на v_{\parallel} и проинтегрируем его вдоль отрезка фазовой траектории, начальная и конечная точки которого лежат в экваториальной плоскости. Для резонансных частиц нужно взять отрезок, который частица проходит за время $4t_{\parallel}$, а для нерезонансных соответственно $2mt_{\parallel}$ (см. разд. 3.5), тогда начальная и конечная точки близки друг к другу. Так как длина пробега ионов много больше длины ловушки L^* , то разность значений функции распределения на концах отрезка мала и ее можно представить как $\Delta r \nabla f$, где Δr — вектор, проведенный из начальной в конечную точку:

$$\Delta r \nabla f = \int_{\text{нач}}^{\text{кон}} \frac{ds}{v_{\parallel}} S t f.$$

Поделив последнее равенство на время движения $4t_{\parallel}$ (либо $2mt_{\parallel}$ для нерезонансных частиц), придем к следующему уравнению:

$$\dot{\psi} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \overline{S t f}, \quad (5.10)$$

где $\overline{S t f}$ — столкновительный член, усредненный вдоль фазовой траектории. В левой части уравнения (5.10) в f нужно положить z равным нулю — его значению в экваториальной плоскости.

* Очевидно, она должна быть также велика по сравнению с mL . Иначе говоря, $\delta\psi_0$ из разд. 3.5 должно выбираться так, чтобы $2\pi L/\delta\psi_0 \ll \lambda$, тогда $mL \ll \lambda$. Так как $L \ll \lambda$, то это всегда можно сделать, не нарушая условия $\delta\psi_0 \ll 2\pi$.

Выражения для \dot{r} и $\dot{\psi}$, соответствующие частицам с $\sigma = +$, были получены в разд. 3.5 и даются формулами (3.44) для резонансных и (3.51) — для нерезонансных частиц. Что же касается функции \dot{f}_- , то ее можно выразить через \dot{f}_+ , если учесть, что частица с $\sigma = -$ и координатами r, ψ на предыдущем шаге пересекла экваториальную плоскость в положительном направлении в точке $r = a \sin(2\psi - \Delta\psi)$, $\psi = \Delta\psi$ (см. разд. 3.5) и воспользоваться приближенным постоянством \dot{f} вдоль отрезка фазовой траектории, ограниченного двумя последовательными пролетами через экваториальную плоскость:

$$\begin{aligned} \dot{f}_-(r, \psi, z=0, \varepsilon, \mu) &= \\ &= \dot{f}_+(r - a \sin(2\psi - \Delta\psi), \psi - \Delta\psi, z=0, \varepsilon, \mu). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вследствие того что радиальные блуждания максимальны для резонансных частиц, максвелловская функция распределения при наличии радиальных градиентов плотности и температуры сильнее всего искажается вдоль определяемых условием резонанса (5.2) линий в плоскости (ε, μ) . При решении кинетического уравнения в окрестности резонансной кривой с данным значением k удобно перейти от ε и μ к таким переменным, одна из которых остается постоянной вдоль этой кривой, например R_h и μ . В этих переменных поправка к максвелловской функции распределения δf изменяется вдвое при изменении R_h на малую величину и слабо зависит от μ . Это позволяет в общем выражении для Stf удерживать только члены, содержащие два дифференцирования по R_h (ср. соответствующее приближение в разд. 4.5). При этом в коэффициенте перед второй производной по R_h можно положить $R_h = r$. Результат имеет вид (см. приложение 5):

$$Stf \simeq v_i(r, \mu) r^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial R_h^2}, \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} v_i(r, \mu) &= \frac{v_0(r)}{r^2} \left[\mu^2 \left(\frac{\partial R_h}{\partial \mu} \right)^2 G_1 + \mu \varepsilon \frac{\partial R_h}{\partial \mu} \frac{\partial R_h}{\partial \varepsilon} G_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R_h}{\partial \varepsilon} \right)^2 G_3 \right], \\ G_2 &= 2h/\chi^{3/2}, \quad G_3 = h/\chi^{5/2}, \end{aligned}$$

а функции $v_0(r)$, G_1 , h и параметры ζ и χ определяются так же, как и в разд. 4.5.

Теперь заметим, что в кинетическом уравнении (5.10) нельзя просто снять знак усреднения в правой части, как это было сделано в разд. 4.5. Это связано с тем, что значение функции распределения в точке фазового пространства $r, \psi, z, \varepsilon, \mu$ в силу постоянства \dot{f} вдоль фазовой траектории равно значению \dot{f}_+ в экваториальной плоскости в точке $r, \psi = \Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)z/L, \varepsilon, \mu$. Поэтому, вследствие интегрального характера столкновительного члена, при вычислении \overline{Stf} «запутываются» значения \dot{f}_+ , соответствующие разным азимутам в экваториальной плоскости. Однако при решении

кинетического уравнения в малой окрестности резонансных кривых в столкновительный член (5.12) входит только значение функции распределения резонансных частиц, для которых можно пренебречь зависимостью $\Delta\psi$ от ε и μ и считать $\Delta\psi = (2k+1)\pi/2$. В этом случае усредненный столкновительный член равен просто Stf от функции распределения, взятой в соответствующей точке экваториальной плоскости. Координата z , таким образом, полностью выпадает из уравнения (5.10).

Переходя к нахождению поправки δf к максвелловской функции распределения, прежде всего остановимся на резонансном режиме плато, когда $\tau_r^{-1} \ll v_{эф}$. Для решения (5.10) в окрестности резонансной кривой (5.2) удобно в столкновительном члене (5.12) перейти от переменной R_k к переменной $x = r - R_k(r, \varepsilon, \mu)$, так чтобы δf являлась функцией $r, \psi, x(r, \varepsilon, \mu), \mu$. Тогда δf_+ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{t_{\parallel}} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \frac{\partial \delta f_+}{\partial \psi} + (-1)^k \frac{a}{t_{\parallel}} \cos 2\psi \frac{\partial f_M}{\partial r} = v r^2 \frac{\partial^2 \delta f_+}{\partial x^2}. \quad (5.13)$$

Отыскивая его решение в виде

$$\delta f_+ = w \cos 2\psi + u \sin 2\psi \quad (5.14)$$

и действуя так же, как в разд. 4.6, придем к тому, что

$$u - iw = v (-1)^{k+1} \frac{a}{2r \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}} \left(\frac{v_i t_{\parallel}}{2r \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}} \right)^{-1/3} \frac{\partial f_M}{\partial r}, \quad (5.15)$$

где функция $v(\zeta)$ является решением уравнения (4.85), а переменная ζ связана с x следующим образом:

$$x = r \left(\frac{v_i t_{\parallel}}{2r \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r}} \right)^{1/3} \zeta. \quad (5.16)$$

Вычисляя теперь поток частиц q по формуле

$$q = 2\pi L_0 r \left\langle \int \delta f \dot{x} d^3v \right\rangle = \frac{4\pi^2 r L_0 B_0}{m_i^2} \sum_{\sigma} \left\langle \int \delta f_{\sigma} \dot{x} \frac{d\varepsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} \right\rangle \quad (5.17)$$

[множитель $2\pi r L_0$ в (5.17) связан с тем, что q — это поток частиц со всей длины установки], приходим к следующему результату:

$$q = \frac{2\pi^2 r B_0}{m_i^2} \sum_k \int d\varepsilon d\mu a^2 \frac{\partial f_M}{\partial r} \delta \left(\Delta\psi - (2k+1) \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.18)$$

В резонансном банановом режиме, когда $\tau_r^{-1} \gg v_{эф}$, кинетическое уравнение (5.10) с точностью до обозначений совпадает с уравнением для δf , которое решалось в разд. 4.5. Поэтому, опуская промежуточные вычисления, мы приведем сразу окончательный результат:

$$q = - \frac{2^{5/2} \pi^3 \gamma r^3 B_0}{m_i^2} \sum_k \int d\epsilon d\mu v_{\parallel} \delta \left(\Delta\psi - (2k+1) \frac{\pi}{2} \right) \left| a \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \right|^{1/2} \frac{\partial f_M}{\partial r}. \quad (5.19)$$

Численный коэффициент γ равен:

$$\gamma = \frac{4}{\pi} - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2} \left[\frac{1}{E(t)} - \frac{2}{\pi} \right] = 0,88,$$

где $E(t)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Описанный выше способ вычислений был реализован в работе [15]. Другим способом (без явного решения кинетического уравнения) выражения (5.18), (5.19) были получены в [42].

Так же как и в неоклассических режимах, отличие функции распределения от максвелловской в резонансном переносе приводит к возмущению плотности $\delta n(r, \psi, z)$ и соответственно к возмущению потенциала $\delta\phi(r, \psi, z)$ на магнитной поверхности $r = \text{const}$. При этом в результате радиального электрического дрейфа на длинной части пробкотрона под действием поля $\delta E_{\psi} = -r^{-1} \partial \delta\phi / \partial \psi$ возникает дополнительное радиальное смещение Δr_{ϕ} , которое, вообще говоря, по порядку величины равно смещению в пробках a . Ниже ход вычислений Δr_{ϕ} будет проиллюстрирован на примере резонансного бананового режима в предположении, что плотность электронов во всем объеме пробкотрона (a не только вдоль силовой линии) подчиняется распределению Больцмана:

$$n_e = \text{const} e^{\frac{e\phi}{T_e}}. \quad (5.20)$$

Это предположение, не являясь принципиальным, позволяет заметно упростить вычисления. Кроме того, расчет Δr_{ϕ} с помощью (5.20) представляет особый интерес для амбиполярной ловушки, где больцмановское распределение электронов может устанавливаться в результате их перемешивания через крайние пробкотроны (см. [11]).

Как следует из результатов разд. 4.5, локализованная часть функции распределения не вносит вклада в δn ; последнее целиком обусловлено нелокализованной частью δf (4.76). Подставляя в интеграл в (4.76) в качестве u_r и u_{ψ} выражения (3.51), получаем, что в резонансном режиме зависящая от ψ нелокализованная часть функции распределения g_+ имеет вид:

$$g_+ = \frac{1}{2} \frac{\partial f_M}{\partial r} \frac{a}{\cos \Delta\psi} \sin 2\psi. \quad (5.21)$$

Функция g_- найдется с помощью соотношения (5.11), примененного к функции $f = f_M + g$:

$$g_-(r, \psi) = g_+(r, \psi - \Delta\psi) + f_M(r - a \sin(2\psi - \Delta\psi)) - f_M(r) = - \frac{1}{2} \frac{\partial f_M}{\partial r} \frac{a}{\cos \Delta\psi} \sin 2\psi. \quad (5.22)$$

Двигаясь вдоль фазовых траекторий, по найденной в экваториальной плоскости функции распределения (5.21), (5.22) можно восстановить g во всем объеме пробкотрона:

$$g_+(r, \psi, z) = g_+\left(r, \psi - \Delta\psi \frac{z}{L}, 0\right),$$

$$g_-(r, \psi, z) = g_-\left(r, \psi + \Delta\psi \frac{z}{L}, 0\right),$$

а затем, интегрируя, вычислить δn_i . Результат имеет вид:

$$\delta n_i = -A(r, z) \cos 2\psi,$$

где

$$A(r, z) = \frac{2\pi B_0}{m_i^2} \int \frac{ded\mu}{|v_{\parallel}|} \frac{a}{\cos \Delta\psi} \sin\left(\frac{2z}{L} \Delta\psi\right) \frac{\partial f_M}{\partial r}.$$

С помощью (5.20) из условия квазинейтральности находим, что

$$\delta\varphi = \frac{Te}{en} \delta n.$$

Поскольку радиальная компонента дрейфовой скорости дается выражением

$$v_r = c\delta E_{\psi}/B_0 = -c \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\psi} / rB_0,$$

то для дополнительного радиального смещения Δr_{φ} имеем:

$$\Delta r_{\varphi} = -\frac{c}{rB_0} \int dt \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\psi}.$$

Вычисляя последний интеграл вдоль отрезка фазовой траектории, который рассматривался при выводе преобразования (3.38), (3.39) (начальную точку этого отрезка обозначим координатами r_0, ψ_0), после простых вычислений получаем:

$$\begin{aligned} \Delta r_{\varphi} = \cos 2(\psi_0 + \Delta\psi) \sin \Delta\psi \frac{4\pi c L_0 T_e}{enr_0 |v_{\parallel}| m_i^2} \int \frac{ded\mu}{|v_{\parallel}|} a \frac{\partial f_M}{\partial r} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\Delta\psi}\right) \operatorname{tg} \Delta\psi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Эта величина должна быть добавлена в правую часть (3.38), в результате вместо a в преобразование (3.39) войдет перенормированное значение \tilde{a} :

$$a \rightarrow \tilde{a} = a - \frac{2\pi c T_e L}{enr m_i^2 |v_{\parallel}|} \int \frac{ded\mu}{|v_{\parallel}|} \tilde{a} \operatorname{tg} \Delta\psi \left(1 - \frac{1}{\Delta\psi}\right) \frac{\partial f_M}{\partial r}. \quad (5.24)$$

Величина \tilde{a} должна заменить a во всех формулах, относящихся к резонансному банановому режиму, в частности в потоке (5.19) и в выражении для Δr_ϕ (5.23) [последнее обстоятельство мы уже учли в (5.24)]. Само \tilde{a} находится из (5.24). Решая это интегральное уравнение с вырожденным ядром, получаем:

$$\tilde{a} = a - \frac{1}{|v_{\parallel}|} \left(\int \frac{ded\mu}{|v_{\parallel}|} a \left(1 - \frac{1}{\Delta\psi} \right) \operatorname{tg} \Delta\psi \frac{\partial f_M}{\partial r} \right) \times \\ \times \left(\frac{enrm_i^2}{2\pi cLT_e} + \int \frac{ded\mu}{v_{\parallel}^2} \left(1 - \frac{1}{\Delta\psi} \right) \operatorname{tg} \Delta\psi \frac{\partial f_M}{\partial r} \right)^{-1}.$$

В заключение укажем, что пример вычислений коэффициентов переноса в резонансном режиме для реальных установок можно найти в работе [43] (в пренебрежении перенормировкой a).

5.3. Влияние на перенос узкого пика на функции отражения. Выше, в разд. 5.1 и 5.2, при рассмотрении резонансной диффузии мы всюду предполагали, что функция отражения $a(r, \epsilon, \mu)$ является плавной функцией своих аргументов. В некоторых случаях это условие может не выполняться: в отдельных областях на плоскости ϵ, μ функция отражения может значительно меняться при малых изменениях значений своих аргументов. Для иллюстрации приведем вид функции a , вычисленной по вакуумному магнитному полю ловушки АМБАЛ [14]. При этом удобно вместо ϵ и μ выразить a через v — скорость частицы перед влетом в пробку и θ — угол между направлением скорости и магнитным полем (питч-угол) в области однородного поля. Тогда

$$a(r, v, \theta) = rvA(\theta);$$

вид функции $A(\theta)$ определяется тем, как устроено магнитное поле внутри пробки. Для АМБАЛа график $A^2(\theta)$ приведен на рис. 13. Как видно из него, зависимость $A(\theta)$ имеет ярко выраженный пик при $\cos \theta = 0,75$ с шириной $\Delta\theta \approx 0,15$, малой по сравнению с $\pi/2$. Появление этого пика обусловлено наличием в пробках установки АМБАЛ относительно длинных переходных участков с почти постоянным значением B , соответствующим локальному пробочному отношению, равному приблизительно 2,3. Частицы с питч-углом, близким к $\arccos 0,75$, проводят на этом участке большое время и удаляются от исходной магнитной поверхности вследствие дрейфа в аксиально-несимметричном магнитном поле. Другая особенность в зависимости $A(\theta)$ (не показанная на рис. 13) существует в окрестности угла конуса потерь $\theta_c = \arcsin k^{-1/2}$, где k — пробочное отношение. Ее происхождение имеет прежнюю природу: при стремлении θ к θ_c время, проводимое частицей вблизи максимума поля, растет, приводя к соответствующему возрастанию смещения Δr .

Как было впервые отмечено в работе [14], наличие острых пиков в функции отражения может приводить к возрастанию скорости переноса в неклассическом режиме, при $\Delta\psi \ll 1$ (см. разд. 3.1). Эффект значителен, если время рассеяния ионов на угол $\Delta\theta$, $\tau_{\Delta\theta} \sim v^{-1}\Delta\theta^2$, меньше их времени пролета через ловушку, $t_{\parallel} \sim L/v$. Тогда частица со значением $\Delta\theta$ внутри пика, испытав отражение от пробки и сместившись на величину a по радиусу (под a понимается характерное значение функции отражения внутри пика), при движении к противоположной пробке рассеивается и покидает область пика, так что характер-

ная для неклассического режима компенсация смещений от противоположных пробок не происходит. За время $\tau_{\Delta\theta}$ испытывает отражение от пробки доля $\tau_{\Delta\theta}/t_{\parallel}$ всех частиц, находящихся в ловушке. При этом из них внутри пика лежит только часть $\sim \Delta\theta$. Соответственно полный коэффициент диффузии может быть оценен как *

$$\frac{a^2}{\tau_{\Delta\theta}} \frac{\tau_{\Delta\theta}}{t_{\parallel}} \Delta\theta \sim \nu a^2 \frac{\tau_{\Delta\theta}}{t_{\parallel} \Delta\theta}.$$

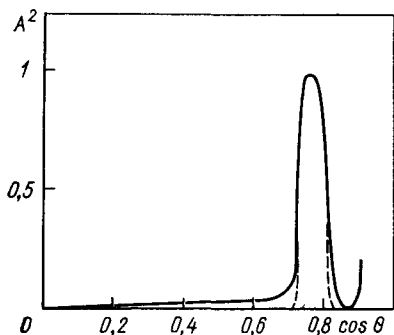


Рис. 13. Вид функции $A^2(\theta)$ для центрального пробкотрона ловушки АМБАЛ (в относительных единицах)

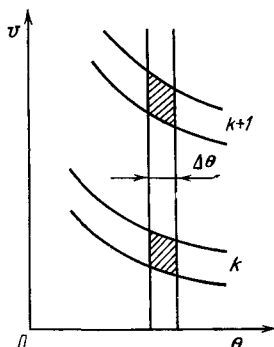


Рис. 14. Плоскость переменных v, θ . Области пересечения резонансных полос с полосой пика функции a заштрихованы

При малых $\Delta\theta$ неравенство $\tau_{\Delta\theta} \ll t_{\parallel}$ совместимо с неравенством $\tau_{\Delta\theta}/t_{\parallel} \Delta\theta \gg 1$, чем и определяется возможность увеличения коэффициентов переноса по сравнению с оценкой νa^2 .

В реальных условиях, однако, неравенство $\tau_{\Delta\theta} \ll t_{\parallel}$ обычно выполняется только для очень длинных ловушек, таких, что в них $\Delta\phi$ делается уже много больше единицы, в связи с чем возникает вопрос о влиянии пиков функции отражения на коэффициенты переноса в резонансном режиме. Соответствующие оценки были проведены в работе [44], а более аккуратные вычисления, основанные на решении кинетического уравнения, — в [45].

Ниже мы ограничимся оценкой эффекта в резонансном режиме применительно к следующей модели функции отражения. Будем считать, что зависимость a от θ имеет вид, изображенный на рис. 13 пунктирной линией, и обозначим через a и $\Delta\theta$ соответственно характерное значение a и ширину пика. Наличие пика приведет к появлению на плоскости v, θ узкой полосы, в которой a отлично от нуля, пересекающей резонансные кривые (5.2) (рис. 14).

Рассмотрим сначала случай, когда относительная ширина резонансной полосы (5.3) больше, чем $\Delta\theta$:

$$\frac{\Delta\mu_r}{\mu}, \quad \frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon} > \Delta\theta. \quad (5.25)$$

* Дополнительные тонкости могут возникать в нерассматриваемом здесь случае, когда пик на функции $a(\theta)$ имеет резкие края (шириной много меньше $\Delta\theta$), см. [14].

При оценке вклада в коэффициент диффузии частиц пика нужно учесть те из них, которые одновременно удовлетворяют условию резонанса (5.2), т. е. лежат в заштрихованной области на рис. 14. Роль эффективной частоты столкновений $\nu_{\text{эф}}$ играет для них величина $\nu/(\Delta\theta)^2$, равная обратному времени нахождения частицы на пересечении двух полос. Пользуясь оценкой для величины радиального смещения резонансной частицы (3.46), так же как в разд. 5.1, получаем, что в банановом режиме, когда $\nu_{\text{эф}} < \tau^{-1}_r$,

$$\mathcal{D} \sim N_{\text{res}} \frac{\nu}{(\Delta\theta)^2} (\Delta x_r)^2 \frac{\Delta\mu_r}{\mu} \Delta\theta \sim \nu R^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} \frac{1}{\Delta\theta \sqrt{\Delta\psi}}, \quad (5.26)$$

$$\nu t_{\parallel} \ll \left(\frac{a\Delta\psi}{R}\right)^{1/2} (\Delta\theta)^2.$$

В режиме плато вклад в \mathcal{D} будут вносить частицы пика, лежащие в окрестности некоторой ширины $\Delta\mu$ резонансных кривых. Величина $\Delta\mu$ находится из условия $\nu_{\text{эф}} \sim \tau^{-1}$, где для τ нужно воспользоваться выражением (5.5):

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \sim \frac{\nu t_{\parallel}}{\Delta\psi (\Delta\theta)^2}. \quad (5.27)$$

С помощью оценки (5.5) для величины смещения Δx рассматриваемых частиц получаем

$$\mathcal{D} \sim N_{\text{res}} \frac{\nu}{(\Delta\theta)^2} (\Delta x)^2 \frac{\Delta\mu}{\mu} \Delta\theta \sim \frac{a^2}{t_{\parallel}} \Delta\theta, \quad \nu t_{\parallel} \geq \left(\frac{a\Delta\psi}{R}\right)^{1/2} (\Delta\theta)^2. \quad (5.28)$$

Наконец, при еще больших частотах столкновений, когда $\nu t_{\parallel} \geq (\Delta\theta)^2$, ширина (5.27) сравнивается с расстоянием между резонансными кривыми, равным $\sim N^{-1}_{\text{res}} \sim 1/\Delta\psi$, выделенность резонансных частиц исчезает и в \mathcal{D} в равной мере вносят вклад все частицы из полосы $\Delta\theta$. Учитывая, что характерная величина радиального смещения для них $\sim a$ и то, что они, вследствие рассеяния, покидают полосу $\Delta\theta$ за один пролет пробкотрона, находим:

$$\mathcal{D} \sim \frac{1}{t_{\parallel}} a^2 \Delta\theta, \quad \nu t_{\parallel} \geq (\Delta\theta)^2,$$

что совпадает с оценкой (5.28). Таким образом, формулы (5.26), (5.28) описывают вклад частиц пика в коэффициент диффузии во всем интервале изменения параметра νt_{\parallel} в случае выполнения неравенства (5.25).

Если же ширина пика больше относительной ширины резонансных полос,

$$\Delta\theta \geq \frac{\Delta\mu_r}{\mu}, \quad \frac{\Delta\epsilon_r}{\epsilon},$$

то коэффициенты диффузии по-прежнему можно вычислять по формулам (5.18), (5.19), подставляя в них нужную функцию отражения.

Чтобы составить представление о роли переноса, связанного с узким пиком $\Delta\theta$, сравним скорость диффузии, определяемой формулами (5.26), (5.28) со случаем резонансной диффузии при плавной зависимости $a(\theta)$ (рис. 15). Как видно из рисунка, наличие пика проявляется в возрастании переноса в области малых частот столкновений.

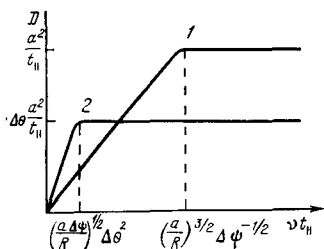


Рис. 15. Зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений для плавной зависимости a от θ (1) и в случае пика ширины $\Delta\theta$ (2)

венный (в масштабе времени соударений ν^{-1}) акт «столкновения» с торцом пробкотрона, приводящий к радиальному смещению частицы в соответствии с формулой (3.37).

Особенность режима $\lambda \lesssim L$ состоит в том, что теперь частица случайным образом блуждает по длине установки и может несколько раз подряд попадать в одну и ту же пробку ловушки, каждый раз смещаясь по радиусу в одном направлении (наружу или внутрь). Число «столкновений» с магнитными пробками (правой и левой), которые испытывает частица в единицу времени, легко оценить, разделив поток частиц, влетающий в пробку $n\nu_T$, на число частиц nL , находящихся в магнитной силовой трубке единичного сечения, что дает обратное время пролета ловушки $\nu_T/L \sim t_{\parallel}^{-1}$. Представим теперь, что частица находится у одной из пробок ловушки. Время, которое нужно ей, чтобы достичь противоположного торца установки, равно

$$t_{dif} \sim \frac{L^2}{\lambda^2} \nu^{-1}. \quad (5.29)$$

За это время произойдет $t_{dif}/t_{\parallel} \sim L/\lambda$ столкновений с магнитными пробками. Таким образом, мы приходим к выводу, что частица, находящаяся у одной из пробок, L/λ раз влетит в нее, прежде чем достигнет противоположной пробки. Если частота азимутального дрейфа $\omega_D = \Delta\psi/t_{\parallel}$ настолько мала, что за время (5.29) частица сдрейфовывает по азимуту на угол, малый по сравнению с $\pi/2$,

$$\omega_D \frac{L^2}{\lambda^2} \nu^{-1} \ll 1, \quad (5.30)$$

то все эти отражения от пробки происходят на одном азимуте. В результате суммарное смещение частицы Δr по порядку величины будет равно

$$\Delta r \sim \bar{a}L/\lambda,$$

где \bar{a} — усредненная по максвелловскому распределению функция отражения (необходимость усреднения связана с тем, что каждый раз влетая в пробку,

5.4. Оценка коэффициентов переноса при $\lambda < L$. Всюду выше предполагалось, что длина пробега ионов и электронов в ловушке существенно превышает длину установки L . Однако в первых экспериментах на амбиполярных ловушках [46, 47] величина λ была либо сравнима с L , либо ненамного превосходила последнюю. Поэтому представляет интерес, по крайней мере на уровне оценок, определить коэффициенты переноса в области $\lambda \lesssim L$. Ниже мы, следуя [48], проведем оценки коэффициента диффузии в этом режиме. Будем считать, что длина пробега λ , хотя и мала по сравнению с L , но все же больше длины пробки l . Это позволяет по-прежнему рассматривать отражение от пробки как мгновенный

частица обладает различными энергией и магнитным моментом). Полагая, что $\bar{a} \sim a$, и оценивая коэффициент диффузии как $(\Delta r)^2/t_{dif}$, получаем:

$$\mathcal{D} \sim a^2 \nu. \quad (5.31)$$

Таким образом, в рассматриваемой области параметров коэффициент диффузии линейно растет с частотой столкновений.

Иначе обстоит дело, когда нарушается неравенство (5.30). Теперь не все последовательные отражения от пробки за время t_{dif} происходят в фазе, что приводит к частичной компенсации радиальных смещений.

Введем в рассмотрение длину L_1 , такую, что за время диффузии на расстоянии L_1 ион сдрейфовывает по азимуту на угол $\pi/2$:

$$L_1 \sim \lambda \sqrt{\frac{\nu}{\omega_D}}.$$

Очевидно, что в силу выполнения неравенства, обратного (5.30), L_1 меньше, чем L , в то же время будем считать, что $L_1 \geq \lambda$ (т. е. $\nu \geq \omega_D$). Рассуждая так же, как и выше, заключим, что частица, находящаяся у пробки, влетит в нее $\sqrt{\nu/\omega_D}$ раз, прежде чем уйдет на расстояние L_1 от пробки [нужно учесть, что частота столкновений с пробкой теперь равна $(L_1/v_T)^{-1}$, а не $(L/v_T)^{-1}$]. Все эти влеты в пробку происходят в фазе (вследствие нашего выбора L_1) и приводят к суммарному смещению

$$\Delta r \sim \bar{a} \sqrt{\nu/\omega_D}. \quad (5.32)$$

В то же время если частица находится на расстоянии L_1 , то следующий ее влет в пробку (в ближайшую или удаленную) приведет к радиальному смещению, нескоррелированному с предыдущим, так как они разделены промежутком времени, большим, чем ω_D^{-1} . Следовательно, элементарным шагом в радиальном блуждании является величина (5.32), а среднее время между шагами t_1 есть время между двумя последовательными посещениями ячеек длины L_1 , прилегающих к пробкам. Оценивая t_1 как время пребывания в ячейке $L_1^2/\lambda^2 \nu \sim \omega_D^{-1}$, деленное на долю времени, которое частица проводит на участке длины L_1 , равную L_1/L , получаем, что

$$t_1 \sim \left(\omega_D \frac{\lambda}{L} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_D}} \right)^{-1}.$$

После этого найдем \mathcal{D} по формуле

$$\mathcal{D} \sim \frac{(\Delta r)^2}{t_1} \sim \frac{a^2}{t_{\parallel}} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_D}}.$$

Наконец, при $\omega_D \geq \nu$ каждый последовательный влет в пробку приводит к радиальному смещению, нескоррелированному с предыдущим. В этом случае

$$\mathcal{D} \sim a^2/t_{\parallel}.$$

5.5. Стохастическая диффузия. В этом разделе рассмотрим режим, когда выполняется неравенство, обратное (5.1). Чтобы понять характер движения частиц в этом случае, найдем, как соот-

носится расстояние между соседними резонансными радиусами R_k и R_{k+1} с шириной «банана» Δx_r . Так как при переходе от R_k к R_{k+1} $\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$ меняется на π , то

$$\Delta R_k = R_{k+1} - R_k \sim \frac{\pi}{|\partial\Delta\psi/\partial r|}.$$

Сравнивая это выражение с (3.46), убеждаемся, что при

$$\left| a \frac{\partial\Delta\psi}{\partial r} \right| \gg 1 \quad (5.33)$$

Δx_r превышает расстояние ΔR_k . Другими словами, в этом случае происходит перекрытие резонансов, в результате чего резонансная структура траекторий разрушается. Вместе с тем это означает, что возникает так называемая «стохастическая» неустойчивость движения [49], приводящая к тому, что перемещение частицы в радиальном направлении приобретает случайный характер.

Критерий (5.33) можно интерпретировать еще и с другой стороны. Радиальное смещение частицы при отражении от пробки приводит к изменению зависящего от радиуса $\Delta\psi$ на величину $\sim a|\partial\Delta\psi/\partial r|$. Соответственно на столько же изменится фаза ψ следующего влета частицы в противоположную пробку. Это эквивалентно сбою фазы ψ , причем согласно (5.33) величина сбоя ≥ 1 . В результате значения азимутов ψ последовательных влетов в пробки становятся нескоррелированными, что и приводит к случайным смещениям по радиусу при прохождении магнитной пробки. Ясно, что в таких условиях радиальное перемешивание частиц описывается уравнением Фоккера—Планка, которое в цилиндрической геометрии имеет вид:

$$t_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r f \langle \Delta r \rangle + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r f \langle \Delta r^2 \rangle. \quad (5.34)$$

Подчеркнем, что радиальный перенос в рассматриваемом режиме происходит без всяких столкновений и обусловлен просто стохастическим движением частиц в ловушке [8]. По этой причине рассматриваемый режим был назван в работе [8] режимом стохастической диффузии.

В уравнение Фоккера—Планка (5.34) входит усредненное по азимуту значение Δr . Если воспользоваться выражением (3.9), основанном на уравнениях дрейфового приближения, то получим, что $\langle \Delta r \rangle = 0$. Это означает, что для определения $\langle \Delta r \rangle$ точности обычных дрейфовых уравнений, полученных в первом приближении по параметру r_H , недостаточно; необходимо учесть дрейфы, пропорциональные r_H^2 . Однако, как будет показано ниже, ответ выражается через введенный выше продольный адиабатический инвариант I , вычисляемый в первом порядке дрейфовой теории.

Мы будем исходить из утверждения, что уравнения, описывающие усредненный по периоду дрейф частицы, захваченной в пробкотроне, можно записать в гамильтоновом виде, причем не только в первом, но и в более высоких порядках дрейфовой теории [50].

Каноническими переменными при этом можно выбрать криволинейные координаты $\alpha(\mathbf{r})$ и $\beta(\mathbf{r})$ ведущего центра частицы [51], определяемые условием:

$$\mathbf{B} = [\nabla\alpha\nabla\beta]. \quad (5.35)$$

Усредненная за период продольных колебаний в ловушке скорость их изменения равна:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha}, \quad (5.36)$$

где

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\alpha, \beta, I, \mu) \quad (5.37)$$

— гамильтониан; I, μ — продольный адиабатический инвариант и магнитный момент, вычисленные с нужной степенью точности. Во втором порядке дрейфовой теории выражения для I и μ были получены в работе [12], но их явные выражения дальше не понадобятся. Период продольных колебаний частицы T выражается через \mathcal{H} обычным образом:

$$T = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \right)^{-1}.$$

Отметим, что переменные α, β обладают следующим свойством, вытекающим из (5.35): поток магнитного поля Φ через некоторую поверхность S

$$\Phi = \int_S d\alpha d\beta. \quad (5.38)$$

Верно и обратное: если для любой поверхности S выполняется соотношение (5.38), то справедливо (5.35). В частности, в области однородного поля напряженности B_0 в качестве координат α и β можно взять:

$$\alpha = B_0 \frac{r^2}{2}, \quad \beta = \psi, \quad (5.39)$$

где r и ψ — цилиндрические координаты силовой линии.

Вычислим изменение координаты α за один период продольных колебаний T . С точностью до членов $\propto T^2$ имеем:

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha^{(1)} + \Delta\alpha^{(2)} = \dot{\alpha}T + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}T^2. \quad (5.40)$$

Первое слагаемое в правой части этого соотношения равно:

$$\Delta\alpha^{(1)} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = \frac{\partial I}{\partial \beta}, \quad (5.41)$$

где функция $I = I(\alpha, \beta, \mathcal{H}, \mu)$ определяется неявно соотношением (5.37). Второе слагаемое можно преобразовать, воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = \dot{\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \beta^2} + \dot{\alpha} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \alpha \partial \beta} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \mathcal{H} / \partial \alpha}{\partial \mathcal{H} / \partial \beta} \right).\end{aligned}\quad (5.42)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta \alpha^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \right)^{-2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \mathcal{H} / \partial \alpha}{\partial \mathcal{H} / \partial \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial I / \partial \alpha}{\partial I / \partial \beta} \right).\end{aligned}\quad (5.43)$$

Имея в виду, что координата β в нашем случае отождествляется с азимутом ψ , определим

$$\langle \Delta \alpha \rangle = \oint d\beta \Delta \alpha.\quad (5.44)$$

Первое слагаемое (5.41) не вносит вклада в усредненное значение $\langle \Delta \alpha \rangle$, а второе, (5.43), с помощью интегрирования по частям дает

$$\langle \Delta \alpha \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \oint d\beta \left(\frac{\partial I}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle (\Delta \alpha^{(1)})^2 \rangle.$$

Подставляя теперь вместо α величину $B_0 r^2 / 2$, найдем $\langle \Delta r \rangle$:

$$\langle \Delta r \rangle = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle \Delta r^2 \rangle.\quad (5.45)$$

Для вычисления правой части этого соотношения достаточно уже воспользоваться приближением (3.9), т. е. первым порядком дрейфовой теории. Отметим, что, как и следовало ожидать, $\langle \Delta r \rangle$ является величиной второго порядка малости по ларморовскому радиусу r_H , так что первый и второй члены в правой части уравнения Фоккера—Планка имеют одинаковый порядок величины.

Подставляя (5.45) в (5.34), запишем кинетическое уравнение для f в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2rt_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial r} r \langle \Delta r^2 \rangle \frac{\partial f}{\partial r}.\quad (5.46)$$

Интегрируя теперь обе части по d^3v и усредняя по азимуту, получаем, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{q}{2\pi r L_0} \right),\quad (5.47)$$

где

$$q = 2\pi r L_0 \int d^3v \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{2t_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2\pi^2 r B_0}{m^2} \int d\epsilon d\mu a^2 \frac{\partial f_M}{\partial r}.\quad (5.48)$$

В последнем выражении мы воспользовались (3.37) для Δr и подставили вместо f ее нулевое приближение — максвелловскую функцию распределения.

Оценка коэффициента диффузии в стохастическом режиме приведена в работе [8]. Его точное значение вычислено в [52]. Там же отмечено, что он совпадает с коэффициентом диффузии в резонансном режиме плато при $\Delta\psi \gg 1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить сумму δ -функций, входящих в (5.18), на их среднее значение (что возможно, если резонансов много и расстояние между ними на фазовой плоскости мало по сравнению с характерным масштабом изменения подинтегральной функции):

$$\sum_k \delta\left(\Delta\psi - (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{\pi}.$$

С помощью проведенных выше рассуждений о сбое фазы, приводящем к стохастичности движения, теперь можно понять, что происходит с ростом частоты столкновений в режиме плато (т. е. при $|ad\Delta\psi/dr| \ll 1$), когда начинает выполняться неравенство (5.8). Легко видеть, что при этом за время пролета ловушки изменение магнитного момента μ (а также энергии ϵ), обусловленное кулоновскими столкновениями, $\Delta\mu \sim \mu(vt_{\parallel})^{1/2}$, таково, что соответствующее изменение $\Delta\psi$ (равное $\Delta\mu \partial\Delta\psi/\partial\mu$) превышает единицу. Иначе говоря, происходит сбой фазы, связанный с изменением $\Delta\psi$ в процессе столкновений. Ясно, что безотносительно к механизму сбоя фазы движение частицы становится стохастическим и радиальный перенос будет определяться уравнениями (5.47), (5.48).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Вычислим продольный ток, протекающий в сечении 2 длинного пробкотрона (см. рис. 7). Так как координата z отсчитывается от экваториальной плоскости, то плоскости 2 соответствует $z = z_2 \equiv -L_0/2$, в плоскости 1 $z = z_1 \equiv -(l + L_0/2)$. Перепишем формулу (2.32) в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{j_{\parallel}}{B} = 2 \frac{c}{B^4} [\mathbf{B} \nabla p] \nabla B$$

и проинтегрируем ее вдоль силовой линии от плоскости 1 до плоскости 2. Учитывая, что в сечении 1 продольный ток равен нулю, получаем:

$$j_2 = 2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{ds}{dz} B^{-4} [\mathbf{B}, \nabla p] \nabla B. \quad (\text{П1.1})$$

При вычислении последнего интеграла с нужной точностью можно положить производную ds/dz равной единице и заменить B там, где оно не входит под знак дифференцирования, на \mathcal{B} . Тогда

$$j_2 = 2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{B}^4} \left\{ -\frac{\mathcal{R}}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{\mathcal{R}}{r} \frac{\partial B}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{B_r}{r} \frac{\partial p}{\partial \psi} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 -B_{\psi} \frac{\partial p}{\partial r} \Big) &= -2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{B}^4} \left\{ \frac{\mathcal{B}}{r} \frac{\partial(B, p)}{\partial(r, \psi)} + \frac{\mathcal{B}'}{r} \frac{\partial(\chi, p)}{\partial(r, \psi)} \right\} = \\
 &= -2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{B}^3} \frac{1}{r} \frac{\partial(r_0, \psi_0)}{\partial(r, \psi)} \left\{ \frac{\partial(B, p)}{\partial(r_0, \psi_0)} + \frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{B}} \frac{\partial(\chi, p)}{\partial(r_0, \psi_0)} \right\}, \quad (\text{П}1.2)
 \end{aligned}$$

где χ — магнитный потенциал (2.4). В переменных r_0, ψ_0, z выражение (2.4) принимает вид:

$$\chi = r_0^2 \frac{B_0}{\mathcal{B}} \left\{ e^{-\Phi} \left(\frac{1}{4} \mathcal{B}' + \varepsilon \right) \cos^2 \psi_0 + e^{\Phi} \left(\frac{1}{4} \mathcal{B}' - \varepsilon \right) \sin^2 \psi_0 \right\}. \quad (\text{П}1.3)$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{\partial(r_0, \psi_0)}{\partial(r, \psi)} = \frac{\mathcal{B}}{B_0} \frac{r}{r_0},$$

которое с очевидностью следует из условия сохранения магнитного потока внутри силовой трубки, перепишем (П1.2) в виде

$$j_2 = -2c \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{B}^2} \frac{1}{r_0} \frac{\partial(\chi \mathcal{B}' \mathcal{B}^{-1} + B, p)}{\partial(r_0, \psi_0)}. \quad (\text{П}1.4)$$

Подставляя в этот интеграл выражения для B и χ (2.10), (П1.3), окончательно получаем:

$$j_2 = ar_0 \frac{\partial p}{\partial r_0} \sin 2\psi_0 + (a \cos 2\psi_0 + d) \frac{\partial p}{\partial \psi_0}, \quad (\text{П}1.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a \\ d \end{aligned} \right\} = \pm cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{B}^4} (e^{\Phi} G_2 \mp e^{-\Phi} G_1), \quad (\text{П}1.6)$$

$$G_1 = 4\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \mathcal{B} \mathcal{B}'' + \frac{3}{4} (\mathcal{B}')^2 \pm (4\mathcal{B}'\varepsilon - 2\mathcal{B}\varepsilon').$$

Так как в силу симметрии ловушки $\mathcal{B}(z)$ и $b(z)$ — четные, а $\Phi(z)$ — нечетная функции координаты z , то легко видеть, что коэффициент d для противоположной пробки изменит знак, а коэффициент a останется прежним.

Докажем следующее свойство выражения для d : если силовые линии пересекают плоскость l под прямым углом, то d пропорционален второму интегралу, входящему в выражение (2.19). Условие перпендикулярности силовых линий к плоскости $z=z_1$ означает, что

$$\varepsilon(z_1) = \mathcal{B}'(z_1) = 0. \quad (\text{П}1.7)$$

Записывая d в виде

$$\begin{aligned}
 d &= -2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{R}^4} \left[\left(4\theta^2 - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{R}'' + \frac{3}{4} (\mathcal{R}')^2 \right) \text{ch } \Phi - (4\mathcal{R}'\theta - 2\mathcal{R}\theta') \text{sh } \Phi \right] = \\
 &= 2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{R}^3} \left[\frac{1}{2} \mathcal{R}'' \text{ch } \Phi - 2\theta' \text{sh } \Phi \right] - \\
 &- 2cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{R}^4} \left[\left(4\theta^2 + \frac{3}{4} (\mathcal{R}')^2 \right) \text{ch } \Phi - 4\mathcal{R}'\theta \text{sh } \Phi \right],
 \end{aligned}$$

с помощью интегрирования по частям нетрудно показать, что последние два интеграла пропорциональны друг другу, когда справедливо (Пл.7) [при этом надо учесть, что в плоскости $z=z_2$ магнитное поле уже однородно, т. е. $\theta(z_2) = \theta'(z_2) = 0$]. В результате получаем

$$d = cB_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mathcal{R}^3} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R}'' \text{ch } \Phi - 2\theta' \text{sh } \Phi \right).$$

Таким образом, если $d=0$, то функция U вырождается в тождественную константу, не зависящую от r_0 и ψ_0 .

Приложение 2

Доказательство достаточности условия (3.57) для вложенности магнитного поля основано на анализе его геометрического смысла. Для этого построим три семейства ортогональных линий, которые будем обозначать h_1 , h_2 и h_3 , характеризуемых тем, что касательные векторы к ним в данной точке направлены соответственно вдоль \mathbf{x} , \mathbf{B} и вектора бинормали к силовой линии \mathbf{b} (семейство h_2 совпадает с силовыми линиями магнитного поля). Из двух пар дуг линий h_2 и h_3 составим дифференциально малый контур, начальная и конечная точки которого лежат на линии h_1 (рис. 16). При этом могут представиться две возможности: либо конечная точка контура 5 не совпадает с начальной точкой 1 (рис. 16, а), либо они совпадут (рис. 16, б) и тогда точку 5 можно отождествить с 1. Вычисляя циркуляцию вектора \mathbf{x} по замкнутому контуру 1—2—3—4—5—1, получаем, что во втором случае она равна нулю (так как \mathbf{x} всюду перпендикулярен линии контура), а в первом случае ненулевой вклад в циркуляцию вносит участок 5—1. Если учесть, что циркуляция по малому контуру пропорциональна проекции ротора на направление нормали к контуру,

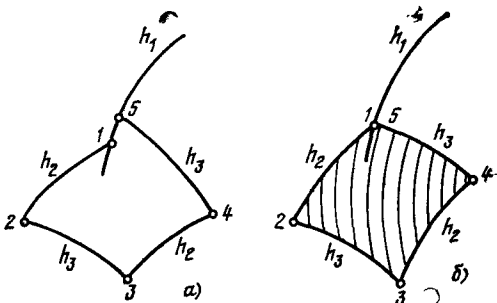


Рис. 16. К анализу условия вложенности

совпадающей в нашем случае с направлением \mathbf{x} , то приходим к выводу, что ситуация, изображенная на рис. 16, б и а, имеет место в зависимости от того, равна $\mathbf{x} \otimes \mathbf{g}$ нулю или нет. В магнитном поле, обладающем свойством вложенности, линии h_2 и h_3 (касательные к которым параллельны \mathbf{v}_{\parallel} и \mathbf{v}_D) лежат на дрейфовой поверхности, поэтому контур, составленный из их дуг, обязательно замкнут, как изображено на рис. 16, б. В случае, когда $\mathbf{x} \otimes \mathbf{g} \neq 0$ в окрестности точки 1, как видно из рис. 16, а, поверхности, на которой бы лежали линии h_2 и h_3 , не существует.

Приведенное рассуждение является одновременно доказательством достаточности условия (3.57) для вложенности: если оно выполняется всюду в области, занятой магнитным полем, то магнитные поверхности можно построить, «натянув» их на сеть линий h_2 и h_3 .

Приложение 3

При выводе уравнений для $\partial N / \partial t$ и $\partial W / \partial t$ удобно исходить из кинетического уравнения, записанного в дивергентном виде (4.2), и выражений для N и W в терминах функции g :

$$N = 2\pi \langle \int d\epsilon d\mu g \rangle, \quad W = 2\pi \langle \int d\epsilon d\mu g (\epsilon - e\bar{\varphi}) \rangle.$$

Вычисляя производную $\partial N / \partial t$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle = -2\pi \left\langle \int \frac{\partial}{\partial \xi^1} \dot{\xi}^1 g d\epsilon d\mu \right\rangle + \\ &+ 2\pi \left\langle \int \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{St} d\epsilon d\mu \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П3.1})$$

Последний член можно преобразовать с помощью (4.8):

$$\begin{aligned} \int d\epsilon d\mu \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{St} &= \frac{4\pi}{m^2} B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int \frac{ds}{|v_{\parallel}|} St f d\epsilon d\mu = \\ &= \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int ds \int d^3v St f = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.2})$$

где мы воспользовались тем обстоятельством, что интеграл столкновений не меняет числа частиц. С учетом (П3.2), подставляя в (П3.1) выражения (3.1) и (4.6) для $\dot{\xi}^1$ и g , приходим к первому из уравнений (4.15).

Вычислим теперь $\partial W / \partial t$, пользуясь уравнением (4.2) и проводя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu (\epsilon - e\bar{\varphi}) \frac{\partial g}{\partial t} - e g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right\rangle = \\ &= 2\pi \left\langle - \int d\epsilon d\mu \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\epsilon - e\bar{\varphi}) g \dot{\xi}^1 \right\rangle - 2\pi \left\langle e \int d\epsilon d\mu \left(\dot{\xi}^1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^1} + \dot{\xi}^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} \right) g \right\rangle + \\ &+ 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu \left[\left(1 - e \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - e \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right] g \right\rangle + \\ &+ 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu (\epsilon - e\bar{\varphi}) \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{St} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{Г.3.3})$$

В правой части полученного выражения первые два члена, если воспользоваться (3.1) и (4.6), переходят соответственно в (4.16) и (4.17). Третий член, пропорциональный скорости изменения потенциала, можно интерпретировать как изменение внутренней энергии плазмы вследствие ее адиабатического нагрева (или остывания) при изменении распределения потенциала вдоль силовой линии:

$$\dot{W}_{ад} \equiv 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu g \left[\left(1 - e \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - e \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right] \right\rangle. \quad (\text{П3.4})$$

Он обращается в нуль в случае стационарного процесса.

Наконец, в последнем слагаемом удобно выделить член, который мы обозначим через Γ , описывающий обмен теплом с другой компонентой плазмы:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{d\xi^3} \int d\Sigma ds \int (\epsilon - e\varphi) St f d^3v.$$

Учитывая (4.1), выражение для Γ можно записать в следующем виде:

$$\Gamma = \frac{8\pi^2}{m^2} \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\epsilon d\mu \frac{ds}{|v_{\parallel}|} (\epsilon - e\varphi) St f \right\rangle. \quad (\text{П3.5})$$

Обозначим оставшуюся часть через \dot{W}_{st} , находим

$$\begin{aligned} \dot{W}_{st} &= 2\pi \left\langle \int d\epsilon d\mu (\epsilon - e\bar{\varphi}) \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{st} \right\rangle - \Gamma = \\ &= \frac{8\pi^2}{m^2} \left\langle B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \int d\epsilon d\mu \frac{ds}{|v_{\parallel}|} (\epsilon - e\varphi) (\overline{St f} - St f) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П3.6})$$

Как следует из последнего выражения, член \dot{W}_{st} обусловлен отличием усредненного столкновительного члена от $St f$.

Приложение 4

Перепишем (4.54) в следующем виде (напомним, что в нашем случае $\overline{\delta\Phi} = \delta\varphi$):

$$\delta n = \frac{4\pi B_0}{emEL_0} \left(\int d\epsilon d\mu \delta I_0 \frac{\partial f_M}{\partial r} - \frac{e}{m} \delta\varphi \int d\epsilon d\mu t_{\parallel} \frac{\partial f_M}{\partial r} \right), \quad (\text{П4.1})$$

где δI_0 обозначает δI , вычисленное без учета $\delta\varphi$. Первый интеграл в выражении (П4.1) удобно представить в следующем виде:

$$\int d\epsilon d\mu \delta I_0 \frac{\partial f_M}{\partial r} = R - \langle R \rangle,$$

где

$$R = \int d\epsilon d\mu I \frac{\partial f_M}{\partial r}.$$

Пользуясь выражением для I :

$$I = \int ds \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - e\varphi_0 - \mu B)}$$

и меняя порядок интегрирования

$$R = \sqrt{\frac{2}{m}} \int ds \int_{e\varphi_0}^{\infty} d\varepsilon \frac{\partial f_M}{\partial r} \int_0^{(\varepsilon - e\varphi_0)/B} d\mu \sqrt{\varepsilon - e\varphi_0 - \mu B},$$

легко найти, что

$$R = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \frac{mTn}{4\pi} U, \quad (\text{П4.2})$$

где $U = \int ds/B$.

Второй интеграл в (П4.1) вычисляется, если воспользоваться выражением (3.33) для t_{\parallel} :

$$\int d\varepsilon d\mu t_{\parallel} \frac{\partial f_M}{\partial r} = \frac{nm^2L}{2\pi B_0} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{3}{4} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{П4.3})$$

Объединяя (П4.1), (П4.2) и (П4.3), получаем (4.55).

Приложение 5

Будем исходить из интеграла столкновений Ландау, записанного в следующем виде:

$$\text{St } f = L \left[\frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left(f \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_{\alpha}} \right) - \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{\beta}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} \right) \right], \quad (\text{П5.1})$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3v' \frac{f(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \\ \varphi_2(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3v' f(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \\ L &= \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \Lambda, \end{aligned}$$

а Λ — кулоновский логарифм. Упростим (П5.1), воспользовавшись тем, что функция распределения f мало отличается от максвелловской:

$$f = f_M + \delta f(\varepsilon, \mu), \quad \delta f \ll f_M,$$

причем δf характеризуется тем, что на плоскости ε, μ существуют некоторые линии, в узкой полосе вблизи которых приближение или удаление от линии приводит к резким изменениям δf . Последнее означает, что после линеаризации в столкновительном члене самыми большими будут члены, содержащие вторые производные δf :

$$\text{St } f \approx -L \frac{\partial^2 \varphi_{2M}}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} \frac{\partial^2 \delta f}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}}, \quad (\text{П5.2})$$

где через φ_{2M} обозначен потенциал φ_2 , вычисленный по максвелловской функции:

$$\varphi_{2M} = -\frac{nT}{4\pi\omega m} \left[(x+1)h'(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right)h(x) \right], \quad (\text{П5.3})$$

где

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t} dt, \\ x = \frac{mv^2}{2T}.$$

Используя явное выражение для φ_{2M} (П5.3), столкновительный член (П5.2) можно переписать в следующем виде:

$$\text{St } f = \frac{2\pi n e^4 \Lambda}{m^2} \frac{\partial^2 \delta f}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \left[\left(h' + h - \frac{h}{2x} \right) \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{v} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^3} \right) + \frac{v_\alpha v_\beta}{v^3} \frac{h}{x} \right]. \quad (\text{П5.4})$$

Учтем теперь, что δf является функцией энергии ε и магнитного момента μ , и выразим входящие в (П5.4) производные по компонентам скорости через производные по ε и μ :

$$\text{St } f = v_0 \left[\mu^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \mu^2} G_1 + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \varepsilon \partial \mu} G_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \varepsilon^2} G_3 \right], \quad (\text{П5.5})$$

где

$$G_1(\xi, x) = \frac{1}{\xi x^{3/2}} \left[h \left(1 - \frac{1}{2x} \right) + h' \right] + \frac{h}{x^{3/2}},$$

$$G_2(x) = 2G_3(x) = \frac{2h}{x^{3/2}},$$

$$\xi = \frac{\mu B}{\varepsilon - e\varphi - \mu B},$$

$$v_0 = \frac{2\sqrt{2}\pi n e^4 \Lambda}{m^{1/2} T^{3/2}}.$$

Полученное выражение справедливо, разумеется, только в малой окрестности упомянутых выше линий в плоскости ε, μ . В неклассическом режиме это линии $\mu = \text{const}$, так что производные по ε малы по сравнению с производными по μ , поэтому в (П5.5) достаточно оставить только первое слагаемое. В резонансном режиме функция δf зависит от $R_h(\varepsilon, \mu)$ и μ , причем

$$R_h \frac{\partial \delta f}{\partial R_h} \gg \mu \frac{\partial \delta f}{\partial \mu}.$$

Последнее позволяет считать, что

$$\frac{\partial^2 \delta f}{\partial \varepsilon^2} = \left(\frac{\partial R_h}{\partial \varepsilon} \right)^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial R_h^2}, \quad \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \mu^2} = \left(\frac{\partial R_h}{\partial \mu} \right)^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial R_h^2}, \quad \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \varepsilon \partial \mu} = \frac{\partial R_h}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_h}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \delta f}{\partial R_h^2}.$$

В результате получим столкновительный член (5.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г. — Ядерный синтез, Дополнение, 1962, ч. 3, с. 1045.
2. Coengen F. H. e. a. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. 1976, Vienna, IAEA, 1977, vol. 2, p. 135.
3. Димов Г. И. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 77-46, Новосибирск, 1977.
4. Coengen F. H. — TMX Major Project Proposal, LLL-Prop-148, Lawrence Livermore Laboratory, 1977.
5. Miyoshi S. e. a. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. 1978, Vienna, IAEA, 1979, vol. 2, p. 437.
6. Kesner J. e. a. Preprint PFC/JA81-11, Massachusetts Institute of Technology, 1981.
7. Riordan J. C., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. — Nucl. Fusion, 1979, vol. 19, p. 21.
8. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 182.
9. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, с. 205.
10. Кадомцев Б. Б. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 285.
11. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 501.
12. Northrop T. G., Liu C. S., Kruskal M. D. — Phys. Fluids, 1966, vol. 9, p. 1503.
13. Hastie R. J., Taylor J. B., Haas F. A. — App. of Phys., 1967, vol. 41, p. 302.
14. Лысянский П. Б., Тиунов М. А. — Физика плазмы, 1982, т. 8, с. 963.
15. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. — Докл. АН СССР, 1978, т. 240, с. 1086.
16. Furth H. P., Rosenbluth M. N. — Phys. Fluids, 1964, vol. 7, p. 764.
17. Rosenbluth M. N., Longmire C. L. — App. of Phys., 1957, vol. 1, p. 120.
18. Волков Т. Ф. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, с. 3.
19. Панов Д. А. Препринт ИАЭ-3535/6, М., 1981.
20. Шафранов В. Д. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 92.
21. Pearlstein L. D., Kaiser T. B., Newcomb W. A. — Phys. Fluids, 1981, vol. 24, p. 1326; Newcomb W. A. — J. Plasma Phys., 1981, vol. 26, p. 529.
22. Ступаков Г. В. — Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 871.
23. Морозов А. И., Соловьев Л. С. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 177.
24. Лысянский П. Б., Фомель Б. М. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 79-58, Новосибирск, 1979.
25. Byers J. A. — Nucl. Fusion, 1982, vol. 22, p. 49.
26. Панов Д. А. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 70.
27. Stupakov G. V. — In: Fusion Energy 1981. Selected Lectures Presented at the Spring College on Fusion Energy, Trieste, 26 May — 19 June, IAEA, Vienna, 1982, p. 255.
28. Ступаков Г. В. — Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 958.
29. Catto P. J., Hazeltine R. D. — Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 46, p. 1002.
30. Northrop T. G., Teller E. — Phys. Rev., 1960, vol. 117, p. 215.
31. Spong D. A., Harris E. G., Hedric C. L. — Nucl. Fusion, 1979, vol. 19, p. 665.
32. Hazeltine R. D. e. a. — Ibid., p. 1597.
33. Hazeltine R. D., Catto P. J. — Phys. Fluids, 1981, vol. 24, p. 290.
34. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, с. 348.
35. Брейзман Б. Н., Мирнов В. В., Рютов Д. Д. — Там же, 1970, т. 58, с. 1770.
36. Mirnov V. V., Ryutov D. D. — Nucl. Fusion, 1972, vol. 12, p. 627.
37. Захаров В. Е., Карпмаи В. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1962, т. 43, с. 490.
38. Hinton F. L., Rosenbluth M. N. — Phys. Fluids. 1973, vol. 16, p. 836.

39. Брагинский С. И. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1/Под ред. М. А. Леоновича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 183.
40. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. — Phys. Rev., 1954, vol. 94, p. 511.
41. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 78-30, Новосибирск, 1978.
42. Cohen R. H., Rowland G. — Phys. Fluids, 1981, vol. 24, p. 2295.
43. Cohen R. H. — Nucl. Fusion, 1979, vol. 19, p. 1579.
44. Ryutov D. D., Stupakov G. V. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. 1980, Vienna. IAEA, 1981, vol. 1, p. 119.
45. Пеккер Л. С. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 81-131, Новосибирск, 1981.
46. Coensgen F. H. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1980, vol. 44, p. 1132.
47. Yatsu K. e. a. — Ibid, 1979, vol. 43, p. 627.
48. Cohen R. H., Nevins W. M., Stupakov G. V. — Nucl. Fusion, 1982, vol. 22, p. 611.
49. Заславский Г. М., Чириков Б. В. — Успехи физ. наук, 1971, т. 105, с. 3.
50. Крускал М. Адиабатические инварианты. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
51. Ступаков Г. В. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 318.
52. Чириков Б. В. — Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 880.

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ПЛАЗМЫ
В ОТКРЫТЫХ АДИАБАТИЧЕСКИХ ЛОВУШКАХ***В. П. Пастухов***Введение**

Открытыми магнитными ловушками называют такие ловушки, в которых силовые линии магнитного поля покидают основной объем плазмы и выходят на стенки камеры или какие-либо специальные приемные устройства. Эти ловушки с точки зрения удержания в них высокотемпературной плазмы обладают целым рядом привлекательных свойств. К числу их достоинств, в первую очередь, следует отнести высокую допустимую величину β (отношение давления плазмы к давлению магнитного поля), большую простоту и технологичность конструкции по сравнению с замкнутыми системами, устойчивость по отношению к грубым гидродинамическим возмущениям (в системах с «минимумом B »). Вместе с тем открытые ловушки имеют и существенные недостатки, главный из которых связан со значительными потерями плазмы вдоль силовых линий.

Все открытые ловушки можно разделить на два больших класса, существенно различающихся по характеру продольных потерь. Первый из них включает ловушки, в которых ларморовский радиус частиц много меньше радиуса кривизны силовых линий, в результате чего величина v_{\perp}^2/B (где v_{\perp} — поперечная скорость частиц, B — модуль магнитного поля) является адиабатическим инвариантом. Поэтому ловушки этого класса часто называют адиабатическими. В силу сохранения энергии и адиабатического инварианта частицы, вектор скорости которых в основном объеме ловушки образует достаточно большой угол с направлением магнитного поля, отражаются при движении вдоль силовой линии от областей с более сильным магнитным полем. Эти области обычно называют магнитными пробками или магнитными зеркалами. В отсутствие столкновений с другими частицами, а также каких-либо электрических колебаний, приводящих к изменению угла между вектором скорости и магнитным полем, захваченная между пробками частица могла бы удерживаться практически неограниченное время. Таким образом, продольные потери плазмы в адиабатических ловушках определяются в основном конфигурацией области адиабатического удержания частиц в пространстве скоростей и скоростью изотропизации функции распределения.

Ко второму классу относятся открытые ловушки, в которых для большинства частиц величина v_{\perp}^2/B неинвариантна, в резуль-

тате чего имеет место быстрое угловое рассеяние частиц на неоднородностях магнитного поля. Типичными представителями этого класса являются ловушки с остроугольной геометрией магнитного поля, у которых в основном объеме плазмы магнитное поле близко к нулю, и продольные потери носят характер вытекания плазмы через узкие «щели» с сильным магнитным полем. При этом продольные потери определяются шириной «щелей», которая, в свою очередь, определяется диффузионным переносом частиц поперек магнитного поля.

Данный обзор посвящен продольным потерям плазмы из адиабатических ловушек. Физические процессы, определяющие продольные потери в остроугольных ловушках, существенно отличны от соответствующих процессов в адиабатических ловушках и в данной работе не рассматриваются. С основными аспектами продольного удержания плазмы в остроугольных ловушках можно ознакомиться в работах [42—46].

Как уже отмечалось выше, продольные потери плазмы в адиабатических ловушках связаны с рассеянием частиц, приводящим к изменению угла между вектором скорости частиц и направлением магнитного поля. Потери, вызванные кулоновским рассеянием, обычно называют классическими. Наряду с ними могут иметь место аномальные потери, возникающие в результате развития кинетических неустойчивостей, связанных с неравновесностью функции распределения какой-либо из компонент плазмы. В предлагаемом обзоре рассматриваются только классические потери. При этом следует подчеркнуть, что классические продольные потери представляют интерес не просто как один из частных механизмов потерь, но имеют более принципиальное значение. Во-первых, классический механизм, в отличие от аномальных, присутствует всегда и тем самым определяет минимальный уровень возможных потерь плазмы. В связи с этим рассмотрение любого типа адиабатических ловушек начинается с оценки классических продольных потерь. Во-вторых, кулоновские столкновения стремятся привести функцию распределения частиц к наиболее равновесному состоянию, что ограничивает класс возможных кинетических неустойчивостей. Таким образом, рассмотрение классических потерь является важной предпосылкой для последующего анализа возможных механизмов аномальных потерь. В-третьих, результаты, основанные на механизме кулоновского рассеяния, в принципе не должны содержать существенных неопределенностей, свойственных, как правило, аномальным механизмам, что придает этим результатам довольно фундаментальный характер.

Класс адиабатических ловушек имеет длительную историю развития и включает в себя такие системы, как простые пробочные ловушки, амбиполярные ловушки, ловушки с вращающейся плазмой, многопробочные ловушки. Родоначальником этого класса является простая пробочная ловушка, идея которой была выдвинута в начале 50-х годов Будкером [1] и независимо Йорком и Постом [2]. Простая пробочная ловушка входит также основным

структурным элементом в схему всех других адиабатических ловушек. В связи с этим в данной работе основные закономерности классических продольных потерь плазмы в адиабатических ловушках рассматриваются на примере простой пробочной ловушки, а затем обобщаются на более сложные системы.

Формально задача о классических продольных потерях математически полностью определена и сводится к решению системы связанных кинетических уравнений для различных компонент плазмы со столкновительным членом в форме Фоккера—Планка или в эквивалентной форме Ландау. Однако ее реальное решение требует привлечения ряда физических и математических упрощений, а также разумного сочетания аналитических и численных методов. Построение приближенных моделей, описание методов их решения и обсуждение точности получаемых результатов составляет основное содержание предлагаемого обзора, причем главное внимание уделяется аналитическим методам.

§ 1. Основные принципы удержания плазмы в простых пробочных ловушках

Конфигурация магнитного поля простой пробочной ловушки схематически изображена на рис. 1. Магнитное поле в ней неоднородно вдоль силовых линий и растет от B_0 в центре до B_m в пробке. Величину $R = B_m/B_0$ называют пробочным отношением. Если ларморовский радиус частицы много меньше радиуса кривизны силовой линии, то ее движение можно описать в дрейфовом приближении [3]. При этом, в силу сохранения энергии и адиабатического инварианта $J_{\perp} = mv_{\perp}^2/2B$, частица должна терять продольную скорость при движении в область более сильного магнитного поля. Легко видеть, что частица не может вылететь из ловушки вдоль силовой линии, если компоненты ее скорости в центре удовлетворяют следующему соотношению:

$$v_{\perp 0}^2(R - 1) \geq v_{\parallel 0}^2, \quad (1.1)$$

где v_{\perp} и v_{\parallel} — соответственно поперечная и продольная компоненты скорости по отношению к магнитному полю. Такие частицы в отсутствие столкновений будут неограниченно долго осциллировать вдоль силовых линий между точками отражения. При этом, конечно, предполагается, что поперечный дрейф частиц не выводит их на боковые стенки ловушки или, другими словами, предполагается замкнутость дрейфовых поверхностей удерживаемых частиц. Область пространства скоростей, в которой (1.1) не выполняется называют конусом потерь. Частицы, вектор скорости которых попадает в эту область, покидают ловушку за время одного пролета.

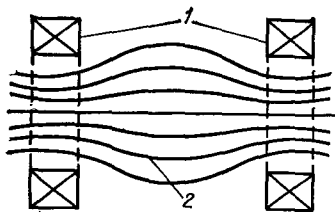


Рис. 1. Магнитная конфигурация простой пробочной ловушки:

1 — катушки с током; 2 — силовые линии

Говоря об удержании плазмы в простых пробочных ловушках, обычно имеют в виду такие условия, когда время рассеяния частиц в конус потерь значительно превышает время пролета вдоль ловушки. Именно эти условия наиболее типичны для физики горячей плазмы и термоядерных приложений. В другом предельном случае, соответствующем быстрому рассеянию в конус потерь, адиабатическая инвариантность J_{\perp} не играет принципиальной роли, и продольные потери носят характер газодинамического вытекания изотропной плазмы вдоль силовых линий. Такая ситуация может реализоваться в достаточно длинных системах с плотной плазмой, например в так называемой газодинамической ловушке [4]. В дальнейшем нас будет интересовать в основном случай редкого рассеяния.

Классические потери определяются кулоновским рассеянием в конус потерь. Однако ионы рассеиваются примерно в $\sqrt{m_i/m_e}$ (где m_i и m_e — соответственно массы ионов и электронов) медленнее, чем электроны с той же энергией. Чтобы выравнять потери ионов и электронов и тем самым сохранить свою квазинейтральность, плазма принимает положительный потенциал относительно торцов, на которые выходят силовые линии, покидающие основной объем плазмы. При положительном потенциале плазмы область адиабатического удержания электронов в пространстве скоростей отличается от (1.1) и имеет вид:

$$v_{\parallel 0}^2 - (R - 1)v_{\perp 0}^2 \leq 2e\Phi_0/m_e, \quad (1.2)$$

где e — заряд электрона; Φ_0 — разность потенциалов между центром плазмы и стенкой. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, величина $e\Phi_0$ обычно в несколько раз превышает среднюю энергию электронов, так что область потерь электронов в пространстве скоростей, имеющая вид двухполостного гиперболоида (рис. 2), попадает в зону больших скоростей. Поэтому функция распределения электронов, формирующаяся в результате кулоновских столкновений, в области $v^2 < 2e\Phi_0/m_e$ не должна сильно отличаться от максвелловской. При этом характерное время продоль-

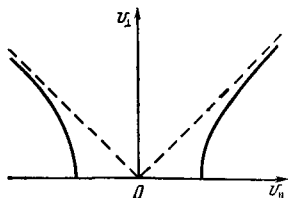


Рис. 2. Граница области удержания электронов

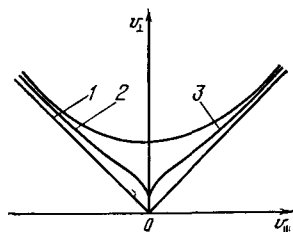


Рис. 3. Граница области удержания ионов:
1 — конус; 2 — гиперболоид; 3 — самосогласованная граница

ных потерь электронов будет примерно в $\exp\{e\Phi_0/T_e\}$, где T_e — электронная температура, превышать время их кулоновского рассеяния в конус потерь, что и обеспечивает выравнивание потерь электронов и ионов.

Улучшая удержание электронов, положительный потенциал плазмы, с другой стороны, должен облегчить выход ионов из ловушки. Действительно, учитывая сохранение энергии и J_{\perp} и полагая, что потенциал в пробке равен потенциалу стенки, приходим к следующему выражению для области удержания ионов:

$$(R-1)v_{\perp 0}^2 - v_{\parallel 0}^2 \geq 2Z_i e\Phi_0/m_i, \quad (1.3)$$

где eZ_i — заряд иона. Согласно (1.3) при положительном потенциале плазмы область потерь в пространстве скоростей ионов расширяется и имеет вид однополостного гиперболоида (рис. 3). При этом ионы с энергией, меньшей $Z_i e\Phi_0/(R-1)$, независимо от направления их скорости, должны теряться из ловушки. Чтобы положительный потенциал плазмы не оказывал катастрофического влияния на удержание ионов, их средняя энергия должна значительно превышать $Z_i e\Phi_0/(R-1)$. С этой целью в условиях простой пробочной ловушки необходимо вводить энергию преимущественно в ионную компоненту плазмы (например, путем инжекции пучка высокоэнергичных нейтральных атомов). При этом равновесная температура электронов, определяемая балансом между их нагревом от ионов и продольными потерями (см. § 2), оказывается примерно на порядок ниже средней энергии ионов, что ограничивает потенциал и минимальную энергию ионов на приемлемом уровне.

Выражение (1.3) для области удержания ионов получено не совсем корректно. Дело в том, что сохранение энергии и J_{\perp} дает следующее выражение для зависимости v_{\parallel}^2 от продольной координаты s :

$$v_{\parallel}^2(s) = v_{\parallel 0}^2 - \frac{2}{m_i} \left[Z_i e (\Phi(s) - \Phi_0) + \frac{m_i v_{\perp 0}^2}{2} \left(\frac{B(s)}{B_0} - 1 \right) \right]. \quad (1.4)$$

Граница области (1.3) соответствует обращению v_{\parallel}^2 в нуль в пробке. Это условие действительно определяло бы границу области удержания, если бы выражение в квадратных скобках, играющее роль эффективной потенциальной энергии $U_{\alpha\Phi}(s)$, достигало в пробке своего максимального значения. Для электронов соответствующее $U_{\alpha\Phi}(s)$ монотонно возрастает от центра к пробке, так что (1.2) правильно определяет область удержания. В случае ионов, как впервые было показано в работе [5], $U_{\alpha\Phi}(s)$ меняется, вообще говоря, немонотонно и может иметь промежуточные максимумы и минимумы. Наличие дополнительных максимумов $U_{\alpha\Phi}(s)$ расширяет область удержания по сравнению с (1.3), так что самосогласованная граница этой области занимает промежуточное положение между конусом (1.1) и гиперболоидом (1.3) (рис. 3). Второе следствие немонотонности $U_{\alpha\Phi}(s)$ состоит в появлении ионов, захваченных вблизи минимумов $U_{\alpha\Phi}(s)$. Эти ионы образуют особую группу, отсутствующую в центральном сечении ловушки.

Явный вид $U_{\text{эф}}(s)$ зависит от $\Phi(s)$, которую можно найти из условия квазинейтральности и приблизительно бoльцмановского распределения плотности электронов в продольном направлении:

$$e(\Phi(s) - \Phi_0) = T_e \ln(n_i(s)/n_{i0}). \quad (1.5)$$

Плотность ионов $n_i(s)$ определяется видом их функции распределения, которая, в свою очередь, зависит от формы границы области удержания в пространстве скоростей и, следовательно, от $U_{\text{эф}}(s)$. Таким образом, определение точной самосогласованной границы области удержания ионов является довольно сложной задачей. Поэтому, как правило, рассматривают области удержания вида (1.1) или (1.3), которые соответственно можно назвать «оптимистической» и «пессимистической» областями.

Перейдем теперь к задаче о кулоновском рассеянии в область потерь. Эволюция функции распределения описывается кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \text{St}[f] + S, \quad (1.6)$$

где $\text{St}[f]$ — столкновительный член в форме Ландау или Фоккера—Планка; $S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — плотность источников частиц в фазовом пространстве; $\dot{\mathbf{v}} \equiv d\mathbf{v}/dt$. В нулевом приближении по отношению времени пролета частиц к времени столкновений функция распределения должна удовлетворять стационарному уравнению Власова:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.7)$$

общим решением которого является произвольная функция интегралов движения. Для простоты рассмотрим сначала аксиально-симметричную ловушку, в которой имеются три интеграла движения. Первые два, энергия ϵ и приближенный интеграл J_{\perp} уже упоминались выше. Третьим интегралом является обобщенный момент, который удобно представить в форме магнитного потока, ограниченного поверхностью дрейфа ларморовского центра частицы:

$$\Psi = 2\pi \int_0^r B_z dr. \quad (1.8)$$

Поправка первого порядка к функции распределения $f^{(1)}$ уже не является функцией только интегралов движения, однако ее можно представить в виде $f^{(1)} = f^{(1)}(\epsilon, J_{\perp}, \Psi, s)$. Кроме того, в первом порядке по отношению времен пролета и столкновений следует учесть медленную зависимость $f^{(0)}$ от времени. Тогда уравнение (1.6) принимает вид:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial s} = \text{St}[f^{(0)}] + S(\epsilon, J_{\perp}, \Psi, s). \quad (1.9)$$

Чтобы исключить $f^{(1)}$ из уравнения (1.9), проинтегрируем его вдоль силовой линии по периоду осцилляций частицы между пробками:

$$\oint \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} \frac{ds}{v_{\parallel}(s)} = \oint \{St[f^{(0)}] + S\} \frac{ds}{v_{\parallel}(s)}. \quad (1.10)$$

Здесь $v_{\parallel}(s) = [2(\varepsilon - J_{\perp} B)/m]^{1/2}$, и интегрирование ведется по замкнутому контуру между точками отражения, где $v_{\parallel}(s) = 0$.

Оператор $St[f^{(0)}]$ и операция усреднения вдоль силовой линии не затрагивают переменную Ψ , что позволяет рассматривать уравнение (1.10) для различных значений Ψ независимо*. В дальнейшем переменную Ψ и индекс нулевого приближения у функции распределения будем опускать.

В силу постоянства f на траектории ведущего центра частицы, ее можно выразить через функцию распределения в центральном сечении f_0 , зависящую только от $v_{\perp 0}$, $v_{\parallel 0}$ и t : $f = f_0(v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}, t)$. Вынося далее $\partial f_0 / \partial t$ за знак интеграла в левой части (1.10), приходим к следующему уравнению для f_0 :

$$\frac{\partial f_0(v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}, t)}{\partial t} = \oint \{St[f_0] + S\} \frac{ds}{v_{\parallel}} / \oint \frac{ds}{v_{\parallel}}. \quad (1.11)$$

Следует отметить, что при переходе от (1.10) к (1.11) мы, по существу, исключили из рассмотрения частицы, захваченные в локальных минимумах $U_{\text{эф}}$ при $s \neq 0$, так как для них f_0 не определена. Для функции распределения таких частиц можно написать отдельное уравнение типа (1.11), выражая f через функцию распределения в точке минимума $U_{\text{эф}}(s)$.

Конкретный вид правой части (1.11) зависит от профиля магнитного поля. Наиболее простой вид правая часть имеет в том случае, когда почти на всей длине ловушки $B(s) = B_0$ и лишь на коротких участках вблизи пробок $B(s)$ изменяется от B_0 до B_m . Тогда, пренебрегая в (1.11) вкладом в интеграл от областей, где $B(s) \neq B_0$, приходим к следующему уравнению для $f_0(v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}, t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= St_0[f_0] + \bar{S}; \\ \bar{S} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L S(v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}, s) ds, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где $St_0[f_0]$ — столкновительный член в центральном сечении, пробки расположены в точках $s = \pm L$. Приближение, в котором получено уравнение (1.12), обычно называют приближением «квадратной ямы». Следует отметить, что область применимости результатов, которые могут быть получены с помощью уравнения (1.12), не ограничивается рамками частного профиля магнитного поля, а имеет более общий характер. Во-первых, качественно эти резуль-

* Приток частиц на поверхность с данным значением Ψ за счет поперечного переноса можно учесть соответствующим выбором плотности источников S .

таты должны сохранять силу и в тех случаях, когда приближение квадратной ямы несправедливо. Во-вторых, как будет видно из дальнейшего, в ряде важных и в то же время довольно общих случаев уравнение (1.11) эффективно может быть сведено к виду, аналогичному (1.12). В связи с этим уравнение (1.12) будет занимать в дальнейшем рассмотрении центральное место.

Коротко остановимся на особенностях аксиально-несимметричных ловушек. В несимметричных ловушках обобщенный момент уже не является интегралом движения. Тем не менее в неслишком длинных системах, где период осциллирующей частиц между пробками много меньше времени обхода ларморовским центром магнитной оси ловушки, роль Ψ в значительной степени выполняет продольный адиабатический инвариант $J_{\parallel} = \oint v_{\parallel}(s) ds$. Однако в отличие от случая аксиальной симметрии f_0 теперь уже не остается постоянной на дрейфовой поверхности, определяемой условием $J_{\parallel} = \text{const}$. Если период обхода магнитной оси мал по сравнению с временем столкновений, то можно провести усреднение по периоду обхода, аналогичное усреднению по периоду продольных осцилляций. Обычно вариации продольного профиля магнитного поля при обходе по дрейфовой поверхности невелики, что позволяет воспользоваться при усреднении по обходу условием, аналогичным приближению квадратной ямы. При этом уравнение для функции распределения в аксиально-несимметричной ловушке сводится к уравнению (1.11) [или (1.12)], полученному для симметричной ловушки. Другими словами, аксиальная несимметрия не должна заметно влиять на интегральную величину продольных потерь. Тем не менее если интересоваться более тонкими эффектами, то влияние несимметрии может оказаться очень существенным. Так, в работе [6] показано, что даже небольшие вариации пробочного отношения на дрейфовой поверхности приводят к сильной пространственной неоднородности потока частиц, покидающих ловушку вдоль магнитного поля.

Основной смысл проведенной выше операции усреднения состоит в том, что задачу об эволюции функции распределения в шестимерном фазовом пространстве в приближении редких столкновений удалось свести к задаче об эволюции функции f_0 в пространстве двух переменных $v_{\perp 0}$ и $v_{\parallel 0}$. Поскольку при кулоновских столкновениях доминирует рассеяние на малые углы, эволюция f_0 носит характер диффузионного расплывания. В приближении редких столкновений f_0 отлична от нуля только внутри области удержания, и, следовательно, потери частиц и энергии определяются диффузионным потоком через границу этой области.

Общее выражение для оператора $St[f]$ в случае кулоновских столкновений было впервые получено в работе Л. Д. Ландау [7]. Однако для дальнейшего изложения более удобна другая эквивалентная форма оператора $St[f]$, полученная в [8, 9]:

$$St[f_{\alpha}] = 2\pi \sum_{\beta} \Lambda^{\alpha/\beta} \left(\frac{Z_{\alpha} Z_{\beta} e^2}{m_{\alpha}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v_j} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2 g_{\beta}}{\partial v_j \partial v_k} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_k} - 2 \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} f_{\alpha} \frac{\partial h_{\beta}}{\partial v_j} \right). \quad (1.13)$$

Здесь индексы α и β относятся к сорту частиц, $\Lambda^{\alpha/\beta}$ — безразмерный коэффициент, называемый кулоновским логарифмом. Функции

$$g_{\beta} = \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_{\beta}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'; \quad h_{\beta} = \int \frac{f_{\beta}(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}', \quad (1.14)$$

связанные между собой соотношениями

$$\Delta_{\nu} g \equiv 2h; \quad \Delta_{\nu} h \equiv -4\pi f, \quad (1.15)$$

где Δ_{ν} — лапласиан в пространстве скоростей, называют обычно потенциалами Розенблюта—Трубникова. По аналогии с теорией броуновского движения уравнение (1.11) с $\text{St}\{f\}$ в форме (1.13) часто называют уравнением Фоккера—Планка. Подробный вывод (1.13) приведен в работе [10].

В системах с кулоновским рассеянием имеет место ряд интегральных законов сохранения. В данном случае нас интересуют законы сохранения числа частиц и энергии. Закон сохранения числа частиц выражается в том, что столкновительный член имеет вид дивергенции потока частиц в пространстве скоростей, в результате чего изменение полного числа частиц любой компоненты плазмы определяется потоком частиц через границу области удержания. Чтобы выяснить закономерности, связанные с перераспределением энергии, найдем изменение суммарной энергии частиц сорта α в результате их столкновений с частицами сорта β . Для этого проинтегрируем $\text{St}_{\beta}[f_{\alpha}]$ по пространству скоростей с весом v^2 . После несложных тождественных преобразований получим

$$\begin{aligned} \int v^2 \text{St}_{\beta}[f_{\alpha}] d\mathbf{v} \equiv & 2\pi\Lambda^{\alpha/\beta} \left(\frac{Z_{\alpha}Z_{\beta}e^2}{m_{\alpha}} \right)^2 \left\{ \int \frac{\partial}{\partial v_k} \left[v^2 \left(\frac{\partial^2 g_{\beta}}{\partial v_k \partial v_j} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_j} - \right. \right. \right. \\ & - \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_k} \Delta_{\nu} g_{\beta} \left. \left. \left. \right) - 2v_j \frac{\partial^2 g_{\beta}}{\partial v_j \partial v_k} f_{\alpha} \right] d\mathbf{v} + \right. \\ & \left. + \frac{4}{m_{\beta}} \int \partial v d\mathbf{v}' \frac{f_{\alpha}(\mathbf{v}) f_{\beta}(\mathbf{v}') (m_{\beta}v'^2 - m_{\alpha}v^2)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \right\}. \quad (1.16) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при столкновениях частиц одного сорта последний член в (1.16) обращается в нуль. В этом случае все изменение энергии определяется потоком частиц через границу области удержания. При столкновениях частиц разного сорта последний член в (1.16) описывает передачу энергии от компоненты β к компоненте α , и в этом случае имеет место сохранение энергии, отдаваемой компонентой β и получаемой компонентой α .

Несколько слов о величине кулоновского логарифма. $\Lambda^{\alpha/\beta}$ равно натуральному логарифму отношения дебаевского радиуса к прицельному параметру, при котором частицы рассеиваются на угол порядка $\pi/2$. Этот прицельный параметр, в свою очередь, равен максимальной из величин $Z_{\alpha}Z_{\beta}e^2/m_{\alpha\beta}|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|^2$ и $\hbar/m_{\alpha\beta}|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|$, где $m_{\alpha\beta}$ — приведенная масса. Строго говоря, $\Lambda^{\alpha/\beta}$ является функцией относительной скорости частиц, однако большое значение $\Lambda^{\alpha/\beta} = 10 \div 20$ позволяет считать его примерно постоянным и заменить относительную скорость ее средней величиной. По существу, это уже учтено в (1.13), где $\Lambda^{\alpha/\beta}$ вынесено за знак интеграла в выражениях для g и h . Тем

не менее не всегда очевидно, что же следует подставлять в качестве средней величины относительной скорости. В первую очередь это относится к рассеянию электронов на ионах, где, как будет показано ниже, следует различать величины Λ , входящие в угловое рассеяние и в обмен энергией. Кроме того, во всех соотношениях, описывающих обмен энергией между различными сортами частиц, должно выполняться условие $\Lambda \alpha/\beta = \Lambda \beta/\alpha$. Более подробно с вопросами, относящимися к кулоновскому логарифму, можно ознакомиться в работах [10, 11].

§ 2. Удержание электронов в простых пробочных ловушках

Используя соотношения, полученные в предыдущем параграфе, рассмотрим задачу об удержании электронов в простых пробочных ловушках. Излагаемый ниже подход к решению уравнения (1.11) был первоначально развит в работе [12], а затем обобщен на случай многокомпонентной плазмы и произвольного профиля $B(s)$ в работе [13], где, в частности, было показано, что результаты, относящиеся к удержанию электронов, с небольшими изменениями могут быть применены к задаче об удержании ионов в центральной секции амбиполярной ловушки.

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда имеется только один сорт ионов с $Z_i=1$ и справедливо приближение квадратной ямы. При этом будем опускать индекс нуль, указывающий, что рассмотрение ведется в центральном сечении ловушки.

Вследствие высокого положительного потенциала плазмы функция распределения основной группы электронов должна быть близка к максвелловской. Поэтому, учитывая интегральную зависимость g от t , можно с хорошей точностью использовать для g_e выражение, соответствующее максвелловской функции распределения:

$$g_e = 4\pi n \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^v v v'^2 \left(1 + \frac{v'^2}{3v^2} \right) \exp \left(-\frac{m_e v'^2}{2T_e} \right) dv' + \int_v^\infty v'^3 \left(1 + \frac{v^2}{3v'^2} \right) \exp \left(-\frac{m_e v'^2}{2T_e} \right) dv' \right\}. \quad (2.1)$$

Средняя скорость электронов значительно превышает среднюю скорость ионов, и в нулевом приближении по параметру m_e/m_i $g_i \approx nv$. В этом приближении электроны при столкновениях с ионами меняют направление скорости, но сохраняют свою энергию. Обмен энергией между ионами и электронами определяется следующими членами разложения. При этом, как будет показано ниже, ионы наиболее эффективно обмениваются энергией с низкоэнергичными электронами, а для рассеяния в гиперболоид потерь важен вид функции распределения при $v \geq \sqrt{2e\Phi/m_e}$.

Таким образом, рассеяние в гиперболоид потерь и обмен энергией с ионами можно рассматривать совершенно независимо. Связь между ними осуществляется через перераспределение энергии по спектру электронов в результате электрон-электронных столкновений и сводится к поддержанию функции распределения, близкой к максвелловской.

Рассмотрим сначала рассеяние в гиперболоид потерь. С учетом сделанных предположений нетрудно привести уравнение (1.12) к $\text{St}[f]$ в форме (1.13) к следующему безразмерному виду:

$$\frac{\tau_e v_{Te}^3}{n} \frac{\partial (n v_{Te}^3 F)}{\partial t} = \hat{C}(F) \equiv 4\pi F^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{2x^3} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu}; \quad (2.2)$$

$$x = v/v_{Te}; \quad \mu = v_{\parallel}/v; \quad G = g_e/nv_{Te};$$

$$v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}; \quad F = v_{Te}^3 f_e/n; \quad \tau_e = \sqrt{m_e T_e^{3/2}}/\sqrt{2} \pi n e^4 \Lambda_e.$$

В уравнении (2.2) учтено, что электрон-ионный кулоновский логарифм, входящий в задачу об угловом рассеянии, должен быть примерно равен электрон-электронному кулоновскому логарифму Λ_e , так как в обоих случаях приведенная масса соответствует m_e , а относительная скорость — v_{Te} . Кроме того, опущен член с источником, что оправдано, когда поступление электронов (например, за счет ионизации) идет преимущественно в низкоэнергичную часть функции распределения. В этом случае влияние источника электронов, как и обмен энергией с ионами, можно учесть аддитивно в уравнениях баланса частиц и энергии.

Характерным временем изменения параметров плазмы, в частности n , Φ и T_e , как отмечалось в § 1, должно быть время ионных столкновений, которое намного превышает τ_e , характеризующее столкновения между электронами. Таким образом, левая часть уравнения (2.2) содержит малый параметр, соответствующий отношению этих времен и равный по порядку величины $\exp\{-e\Phi/T_e\}$. В нулевом приближении по этому параметру функция F должна удовлетворять уравнению

$$\hat{C}(F) = 0 \quad (2.3)$$

с граничным условием обращения F в нуль на границе гиперболоида (1.2). Зная решение (2.3), легко получить выражения для dn/dt и dT_e/dt , вычисляя потоки частиц и энергии через поверхность гиперболоида соответствующие этому квазистационарному решению.

Поскольку решение уравнения (2.3) заметно отличается от максвелловской функции лишь при $v \geq \sqrt{2e\Phi/m_e}$, можно ограничиться рассмотрением функции F в области $x \gg 1$. Тогда с учетом малости $\exp\{-x^2\}$ уравнение (2.3) существенно упрощается и принимает вид:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(F + \frac{1}{2x} \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение вместе с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} F|_{x \rightarrow 0} &\rightarrow \frac{e^{-x^2}}{\pi^{3/2}} + O(e^{-x_\Phi^2}); & F|_{\mu^2 = \mu_{\text{гр}}^2; x = x_\Phi} &= 0; \\ \mu_{\text{гр}}^2 &= \frac{R-1}{R} + \frac{x_\Phi^2}{Rx^2}; & x_\Phi^2 &= e\Phi/T_e \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

полностью определяет математическую постановку задачи. Для того чтобы в дальнейшем иметь возможность проводить различные модификации полученных результатов, вместо (2.4) будем рассматривать уравнение более общего вида:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(F + \frac{1}{2x} \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{x^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0, \quad (2.6)$$

где α — безразмерный параметр порядка 1.

Решение уравнения (2.6) осложнено тем, что граничные условия (2.5) не позволяют применить метод разделения переменных. Наиболее общим методом решения дифференциальных уравнений в подобных случаях являются построение и решение некоторого вспомогательного интегрального уравнения. Чтобы воспользоваться этим методом, продолжим функцию F в область гиперболоида потерь $\{x > x_\Phi; \mu_{\text{гр}}^2 < \mu^2 \leq 1\}$ так, чтобы F была непрерывна вместе со своими первыми производными на поверхности гиперболоида. В этой области F не обязана удовлетворять уравнению (2.6), однако можно потребовать, чтобы в расширенной области определения, представляющей собой все пространство скоростей, она удовлетворяла уравнению:

$$\hat{C}(F) + Q(x, \mu) = 0, \quad (2.7)$$

где $Q(x, \mu)$ — некоторая плотность источников, отличная от нуля в области $\{x > x_\Phi; \mu_{\text{гр}}^2 < \mu^2 \leq 1\}$. Зная фундаментальное решение (функцию Грина) уравнения (2.7), можно выразить F через Q . Тогда, учитывая граничные условия, получаем уравнение Фредгольма первого рода для определения $Q(x, \mu)$.

Решение такого интегрального уравнения аналитическими методами, вообще говоря, не является более простой задачей, чем решение исходного уравнения. Однако в нашем случае можно использовать следующую приближенную процедуру. Предположим, что плотность источников $Q(x, \mu)$ задана таким образом, что функция F обращается в нуль на некоторой поверхности Σ , вообще говоря, отличной от поверхности гиперболоида. Поскольку с увеличением x F убывает экспоненциально, основной вклад в потери электронов из ловушки вносит область, непосредственно прилегающая к вершине гиперболоида. Если поверхность Σ мало отличается от поверхности гиперболоида вблизи его вершины, то потоки

частиц и энергии через эту поверхность также должны мало отличаться от потоков через поверхность гиперboloида. В связи с этим рассмотрим распределение источников (или, точнее, стоков) вида

$$Q(x, \mu) = -qe^{-x^2} \delta(1 - \mu^2) \eta(x - a), \quad (2.8)$$

где $\eta(x-a)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Константы q и a определим из условий, что поверхность Σ , соответствующая источнику вида (2.8), совпадает с поверхностью гиперboloида потерь в точке $\{x=x_\Phi, \mu^2=1\}$ и имеет тот же радиус кривизны в окрестности этой точки:

$$F(x_\Phi; \mu^2=1) = 0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{Rx} \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\mu^2=1; x=x_\Phi} = 0. \quad (2.9)$$

Заметим, что множитель $\exp\{-x^2\}$ в Q позволяет сохранить у поверхности Σ топологические свойства гиперboloида.

Чтобы построить решение уравнения (2.7) с распределением источников (2.8), необходимо найти фундаментальное решение (2.7), т. е. функцию \tilde{F} , удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\widehat{C}(\tilde{F}) - \frac{\delta(x-\xi) \delta(1-\mu^2)}{\pi x^2} = 0. \quad (2.10)$$

После замены переменного $r = \exp\{x^2\}$ уравнение (2.10) принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{\alpha}{r^2 \ln r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mu} - \frac{\delta(r-r_0) \delta(1-\mu^2)}{\pi r_0} = 0, \quad (2.11)$$

где $r_0 = \exp\{\xi^2\}$. Уравнение (2.11) очень похоже на уравнение для кулоновского потенциала точечного источника (причем максвелловское распределение соответствует источнику, расположенному в начале координат). Однако в общем случае выражение для кулоновского потенциала использовать нельзя, так как оператор, действующий на \tilde{F} , не является лапласианом. Тем не менее используем эту полезную аналогию, для чего с помощью замены переменных $\rho = r \sqrt{1-\mu^2}$ и $\zeta = r\mu \sqrt{\alpha} / \sqrt{\ln r^2}$ преобразуем (2.11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\zeta \tilde{F}) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\zeta \tilde{F}) + O[(1-\mu^2)x^2/\alpha] - \\ - \frac{r_0^2}{2\pi \rho} [\delta(\zeta - r_0) - \delta(\zeta + r_0)] \delta(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку наибольший интерес для нас представляет решение уравнения (2.12) в области достаточно малых углов $(1-\mu^2) \ll [T_e/R(e\Phi + T_e)]$, то при больших R членами $O[(1-\mu^2)x^2/\alpha]$ можно пренебречь, и тогда получаем следующее приближенное выражение для \tilde{F} :

$$\tilde{F} \approx - \frac{r_0^2}{4\pi \zeta} \left\{ [\rho^2 + (\zeta - r_0)^2]^{-\frac{1}{2}} - [\rho^2 + (\zeta + r_0)^2]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.13)$$

Учитывая тот факт, что при $x \rightarrow 0$ функция F должна быть максвелловской с точностью до членов порядка $\exp\{-x^2/\Phi\}$, получаем:

$$F = \frac{e^{-x^2}}{\pi^{3/2}} + \pi \int_a^\infty q e^{-\xi^2} \tilde{F} \xi^2 d\xi \approx \frac{e^{-x^2}}{\pi^{3/2}} - \frac{qa^2 x e^{-x^2}}{4\alpha\mu} \times$$

$$\times \ln \left\{ \frac{\frac{e^{a^2}}{\sqrt{2a^2}} + \mu \frac{e^{x^2}}{\sqrt{2x^2}} + \left[\frac{1-\mu^2}{\alpha} e^{2x^2} + \left(\frac{e^{a^2}}{\sqrt{2a^2}} + \mu \frac{e^{x^2}}{\sqrt{2x^2}} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{e^{a^2}}{\sqrt{2a^2}} - \mu \frac{e^{x^2}}{\sqrt{2x^2}} + \left[\frac{1-\mu^2}{\alpha} e^{2x^2} + \left(\frac{e^{a^2}}{\sqrt{2a^2}} - \mu \frac{e^{x^2}}{\sqrt{2x^2}} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в уравнения (2.9) и полагая $a = x_\Phi$ в степенных множителях, после несложных, но несколько громоздких алгебраических преобразований получаем:

$$\exp\{a^2\} \approx \frac{2\alpha R + 1}{2\alpha R} \exp\{x_\Phi^2\}; \quad q \approx \frac{4\alpha}{\pi^{3/2} x_\Phi^3 \ln(4\alpha R + 2)}. \quad (2.15)$$

Таким образом, распределение источников (2.8) и функция распределения (2.14) плотностью определены.

Чтобы получить выражение для изменения плотности электронов вследствие их ухода из ловушки, проинтегрируем уравнение (2.2) по объему области удержания в пространстве скоростей. Поскольку столкновительный член имеет вид дивергенции потока частиц в пространстве скоростей, величина dn/dt определяется потоком частиц через поверхность гиперboloида. При этом достаточно рассмотреть поток, соответствующий квазистационарной функции распределения, который с учетом (2.7) равен интегралу от плотности фиктивных источников $Q(x, \mu)$, расположенных внутри гиперboloида потерь. В результате получаем следующее выражение:

$$\frac{\tau_e}{n_e} \left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{yx} = 4\pi \int_{x_\Phi}^\infty x^2 dx \int_{\mu_{гр}}^1 d\mu Q(x, \mu). \quad (2.16)$$

Каждый электрон, пересекающий поверхность гиперboloида потерь в интервале от v до $v + dv$, уносит из плазмы энергию $m_e v^2/2$. Принимая во внимание, что вектор потока частиц в области гиперboloида потерь имеет преимущественно угловое направление, выражение для потерь энергии, связанных с уходом электронов из ловушки, можно записать в виде, аналогичном (2.16):

$$\frac{3\tau_e}{2n_e T_e} \left(\frac{dn_e T_e}{dt} \right)_{yx} = 4\pi \int_{x_\Phi}^\infty x^4 dx \int_{\mu_{гр}}^1 d\mu Q(x, \mu). \quad (2.17)$$

Подставляя (2.8), (2.15) в (2.16), (2.17) и выполняя интегрирование, приходим к следующим выражениям:

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_{yx} \approx -\frac{4\alpha_e n_e}{\sqrt{\pi} \tau_e} \frac{2\alpha_e R}{2\alpha_e R + 1} \frac{\exp\{-e\Phi/T_e\}}{\ln(4\alpha_e R + 2)} \frac{T_e}{e\Phi} \times \\ \times \left[1 + \frac{T_e}{2e\Phi} + O\left(\frac{T_e^2}{e^2\Phi^2}\right)\right]; \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{dn_e T_e}{dt}\right)_{yx} \approx -\frac{4\alpha_e n_e T_e}{\sqrt{\pi} \tau_e} \frac{2\alpha_e R}{2\alpha_e R + 1} \frac{\exp\{-e\Phi/T_e\}}{\ln(4\alpha_e R + 2)} \times \\ \times \left[\frac{2}{3} + \frac{T_e}{e\Phi} + O\left(\frac{T_e^2}{e^2\Phi^2}\right)\right]. \quad (2.19)$$

Члены $O(T_e^2/e^2\Phi^2)$ в (2.18), (2.19) можно опустить, так как их учет превышает точность промежуточных вычислений. Приведем также выражение для средней энергии, уносимой электроном из плазмы:

$$\langle \epsilon \rangle_e = \frac{3}{2} \left(\frac{dn_e T_e}{dt}\right)_{yx} / \left(\frac{dn_e}{dt}\right)_{yx} \approx e\Phi + T_e. \quad (2.20)$$

Первый член в (2.20) соответствует энергии, которую электрон затрачивает на преодоление потенциального барьера, а второй — надбарьерной энергии, выносимой электроном на стенку.

В плазме с одним сортом ионов, имеющих $Z_i=1$, в приближении квадратной ямы $\alpha_e=1$, что соответствует одинаковой эффективности углового рассеяния электронов с $v \gg v_{Te}$ как на тепловых электронах, так и на ионах. В многокомпонентной плазме с $Z_i \neq 1$ все изменения в полученных выше выражениях, как легко видеть, сводятся лишь к изменению величины α_e , которая принимает вид:

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sum Z_i^2 n_i}{n_e}\right), \quad (2.21)$$

где n_i — парциальные плотности различных сортов ионов, связанные с плотностью электронов n_e соотношением $n_e = \sum Z_i n_i$, а суммирование ведется по всем сортам ионов.

Введем характерное время продольных потерь электронов τ_{\parallel}^e , определив его так, чтобы n_e/τ_{\parallel}^e было равно правой части (2.18). Согласно (2.18) величина $\alpha_e n_e \tau_{\parallel}^e$ должна зависеть только от двух комбинаций параметров плазмы: $e\Phi/T_e$ и $\alpha_e R$. В работе [13] численным решением двумерного уравнения Фоккера—Планка была проведена проверка этих зависимостей, которая показала, что приближенное аналитическое выражение (2.18) хорошо согласуется с результатами численных расчетов. Соответствующие аналитические и численные зависимости приведены на рис. 4 и 5.

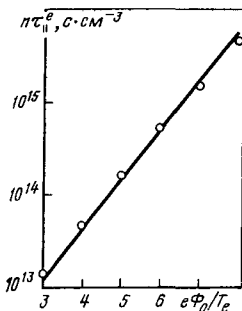


Рис. 4. Зависимость $\pi \tau_{\parallel}^e$ от $e\Phi/T_e$ при $R=10$ и $T_e=45$ кэВ:

Точки соответствуют результатам численных расчетов [13]

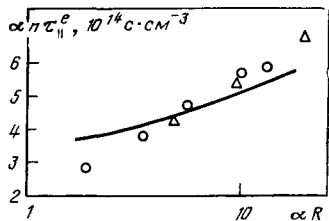


Рис. 5. Зависимость $\alpha \pi \tau_{\parallel}^e$ от αR при $e\Phi/T_e=6$ и $T_e=45$ кэВ. Численные результаты, полученные в работе [13] при фиксированном α , обозначены значком \circ , при фиксированном R — значком Δ

Обобщим полученные результаты на случай произвольного профиля магнитного поля. При этом, согласно результатам § 1, мы должны вместо (2.2) написать следующее уравнение:

$$\frac{v_{Te}^3}{n_0} \frac{\partial f_0(v_0, \mu_0, t)}{\partial t} \oint \frac{ds}{v_{\parallel}} = \frac{1}{\tau_{e0}} \oint \frac{ds}{v_{\parallel}} \frac{n}{n_0} \widehat{G}(F_0), \quad (2.22)$$

где индекс нуль относится к центральному сечению плазмы. Перейдем в операторе \widehat{C} от переменных x и μ , характеризующих скорость частицы в точке s , к переменным x_0, μ_0 :

$$x_0^2 = x^2 + \frac{e(\Phi_0 - \Phi(s))}{T_e}; \quad \mu_0^2 = 1 - \frac{x^2 B_0}{x_0^2 B(s)} (1 - \mu^2). \quad (2.23)$$

Так же как и при анализе уравнения (2.6) в приближении квадратной ямы, нас будет интересовать область $x_0 \gg 1, (1 - \mu_0^2) \ll 1$, где выражение для \widehat{C} можно записать в следующем приближенном виде:

$$\begin{aligned} \widehat{C}(F_0) \approx & \frac{x_0}{x} \frac{1}{x_0^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(F_0 + \frac{1}{2x_0} \frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right) + \\ & + \frac{\alpha \mu^2 B_0}{x x_0^2 \mu_0^2 B} \frac{\partial}{\partial \mu_0} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial F_0}{\partial \mu_0} + O \left[(1 - \mu^2) \frac{B - B_0}{B_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Не выходя за рамки приближений, которые были использованы при решении уравнения (2.6), можно опустить последний член в выражении (2.24), а также заменить x при выполнении операции усреднения вдоль силовой линии приближенным выражением $x \approx x_0 \sqrt{\Phi(s)/\Phi_0}$. В результате уравнение для квазистационарной функции $F_0(x_0, \mu_0)$ снова приводится к виду (2.6), где вместо α стоит $\bar{\alpha}_e$, определяемое следующим соотношением:

$$\bar{\alpha}_e \approx \frac{1}{2} \oint \left(1 + \frac{\sum Z_i^2 n_i(s)}{n_e(s)} \right) \frac{n_e(s) B_0}{\Phi(s) B(s)} ds / \oint \frac{n_e(s)}{\Phi(s)} ds. \quad (2.25)$$

Интегрируя уравнение (2.22) по пространству скоростей в центральном сечении ловушки и используя полученное ранее решение уравнения (2.6), нетрудно убедиться в том, что при произвольном профиле магнитного поля продольные потери электронов определяются соотношениями (2.18), (2.19), в которых нужно заменить n_e на n_{e0} , Φ на Φ_0 , $\bar{\alpha}_e$, а τ_e на $\bar{\tau}_e$, где

$$\bar{\tau}_e^{-1} = \frac{1}{\tau_{e0}} \oint \frac{n_e(s) \Phi_0}{n_{e0} \Phi(s)} ds / \oint \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi(s)}} ds. \quad (2.26)$$

В основном объеме плазмы, где $n_e/n_{e0} \gg \exp\{-e\Phi_0/T_e\}$, продольное распределение плотности электронов приближенно описывается бoльцмановской формулой, что позволяет легко выразить $\Phi(s)$ через $n_e(s)$. Однако при вычислении интегралов по длине силовой линии в (2.25), (2.26) использование бoльцмановской формулы может привести к появлению расходящихся. Чтобы избежать этих расходящихся, нужно учесть отклонение от бoльцмановского распределения в области малых плотностей. Принимая во внимание, что области с низкой плотностью должны давать малый вклад в усредненные величины, для связи $\Phi(s)$ с $n_e(s)$ можно использовать следующее модельное соотношение, обрещающее $\Phi(s)$ в нуль при $n_e(s) \rightarrow 0$:

$$\frac{e\Phi(s)}{T_e} \approx \ln \left[1 + \frac{n_e(s)}{n_{e0}} \left(\exp \left(\frac{e\Phi_0}{T_e} \right) - 1 \right) \right]. \quad (2.27)$$

Перейдем теперь к рассмотрению обмена энергией между ионами и электронами, который играет важную роль в энергобалансе электронной компоненты. В простейшем случае однородной плазмы и максвелловского распределения электронов и ионов по скоростям обмен энергией описывается хорошо известной формулой Спитцера [14]. Однако в условиях простой пробочной ловушки, где функция распределения ионов существенно отличается от максвелловской и плазма сильно неоднородна по длине силовой линии, формула Спитцера требует некоторого обобщения.

Передача энергии от ионов к электронам неоднородна как по длине ловушки, так и по спектру электронов, что, вообще говоря, может приводить к некоторому искажению электронной функции распределения, преимущественно в области малых скоростей. Однако это искажение должно быть невелико, так как передача энергии определяется членами порядка m_e/m_i по сравнению с электрон-электронным столкновительным членом. Учет этих искажений, а также отклонения функции распределения электронов от максвелловской при $v \geq v_\Phi$ могут привести лишь к небольшим поправкам в интегральной величине передаваемой энергии. Поэтому с самого начала будем полагать функцию распределения электронов максвелловской и описывать передачу энергии усредненным образом в терминах изменения электронной температуры. С этой целью умножим уравнение (1.6) с $S=0$ на $m_e v^2/2$ и проинтегрируем его по скоростям, а также по объему силовой трубки с единичным сечением в центре, т. е. по $B_0 ds/B$. В результате подстановки максвелловской функции в уравнении (1.6) обратятся

в нуль член $(\mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{r} + \dot{\mathbf{v}} \partial f / \partial \mathbf{v})$ в левой части, а также электрон-электронный столкновительный член и член с угловым рассеянием на ионах, тогда усредненное уравнение, включающее для простоты только один сорт ионов, примет вид:

$$\left(\frac{\partial T_e}{\partial t} \right)_{ei} \int \frac{n_e(s)}{B(s)} ds = \frac{8\pi^2 Z_i^2 e^4}{3m_e} \Lambda^{e/i} \int \frac{ds}{B(s)} \int_0^\infty v^2 dv \frac{\partial}{\partial v} \times \\ \times v^2 \left(\frac{\partial f_e}{\partial v} \frac{\partial^2 \bar{g}_i}{\partial v^2} - \frac{m_e}{m_i} f_e \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_i \right), \quad (2.28)$$

где

$$\bar{g}_i = \int_0^1 g_i(v, \mu, s) d\mu = \int_0^v v'^2 v \left(1 + \frac{v'^2}{3v^2} \right) \bar{f}_i dv' + \int_v^\infty v'^3 \left(1 + \frac{v^2}{3v'^2} \right) \bar{f}_i dv'; \quad (2.29)$$

$$\bar{f}_i = 4\pi \int_0^{\mu_{\text{гр}i}} f_i d\mu; \quad \mu_{\text{гр}i}(v, s) = 1 - \frac{B(s)}{B_m} \left(1 + \frac{2eZ_i \Phi(s)}{m_i v^2} \right).$$

Здесь приведено выражение для $\mu_{\text{гр}i}(v, s)$, соответствующее ионному гиперboloиду потерь (1.3). Однако следует отметить, что во всех последующих выражениях явный вид $\mu_{\text{гр}i}$ не играет принципиальной роли.

Подставляя (2.29) в (2.28) и проводя тождественные преобразования, включающие интегрирование по частям, приводим уравнение (2.28) к следующему виду:

$$\left(\frac{dT_e}{dt} \right)_{ei} \int \frac{n_e(s)}{B(s)} ds = \frac{2(4\pi e^2 Z_i)^2}{3m_e} \Lambda^{e/i} \int \frac{ds}{B(s)} \int_0^\infty dv \bar{f}_i(v) \times \\ \times \left(v \int_0^v f_e(v') v'^2 dv' - \frac{m_e}{m_i} v^2 \int_v^\infty f_e(v') v' dv' \right). \quad (2.30)$$

Поскольку средняя скорость электронов значительно превышает среднюю скорость ионов, при вычислении внешнего интеграла по v в (2.30) выражение, стоящее в скобках, можно разложить в ряд по степеням v . Здесь следует вспомнить, что $\Lambda^{e/i}$, строго говоря, зависит от $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ и лишь приближенно вынесено за знак интеграла по v и v' с заменой относительной скорости сталкивающихся частиц некоторым средним значением. Первый член в правой части (2.30) описывает передачу энергии от ионов к медленным электронам, и соответствующая ему относительная скорость частиц примерно равна средней скорости ионов. С учетом того, что приведенная масса в электрон-ионных столкновениях примерно равна m_e , можно написать следующее выражение для кулоновского логарифма

рифма Λ_{ie}^e , соответствующего члену с передачей энергии от ионов к медленным электронам:

$$\Lambda_{ie}^e \approx \Lambda_i - \ln(m_i/m_e), \quad (2.31)$$

где Λ_i — ион-ионный кулоновский логарифм. Второй член в правой части (2.30) описывает передачу энергии от электронов, имеющих скорости выше средней ионной, к ионам. Ему соответствует относительная скорость сталкивающихся частиц, примерно равная средней скорости электронов, и кулоновский логарифм, примерно равный Λ_e . Учитывая изложенные выше замечания и вводя обозначение:

$$\langle v^k \rangle_i = n_i^{-1} \int_0^\infty v^{k+2} \bar{f}_i dv, \quad (2.32)$$

приводим (2.30) к следующему виду:

$$\left(\frac{dT_e}{dt} \right)_{ei} \int \frac{n_e}{B} ds = \frac{2(4\pi e^2 Z_i)^2}{3m_e} \int \frac{n_i}{B} ds \left[\left(\frac{\langle v^2 \rangle_i}{3} f_e \Big|_{v=0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\langle v^4 \rangle_i}{10} \frac{\partial^2 f_e}{\partial v^2} \Big|_{v=0} \right) \Lambda_{ie}^e - \frac{m_e}{m_i} \Lambda_e \int_0^\infty f_e(v) v dv \right]. \quad (2.33)$$

Величины $\langle v^2 \rangle_i$ и $\langle v^4 \rangle_i$ удобно выразить через среднюю энергию ионов ε_i , поскольку $\langle v^2 \rangle_i = 2\varepsilon_i/m_i$, а $\langle v^4 \rangle_i$ пропорционально $(\varepsilon_i/m_i)^2$, причем коэффициент пропорциональности слабо зависит от вида \bar{f}_i . Учитывая относительную малость члена с $\langle v^4 \rangle_i$, его можно вычислить в предположении максвелловости \bar{f}_i . Тогда, подставляя в (2.33) в качестве f_e максвелловскую функцию, получаем окончательное выражение для нагрева электронов от ионов:

$$\left(\frac{dT_e}{dt} \right)_{ei} = \frac{16}{9\sqrt{\pi}\tau_{e0}} \frac{m_e}{m_i} \int ds \frac{n_e n_i Z_i^2}{n_{e0} B} \times \\ \times \left\{ \varepsilon_i \left(1 - \frac{m_e \varepsilon_i}{m_i T_e} \right) \frac{\Lambda_{ie}^e}{\Lambda_e} - \frac{3}{2} T_e \right\} / \int ds \frac{n_e}{B}. \quad (2.34)$$

В приближении квадратной ямы и максвелловского распределения ионов по скоростям (2.34) соответствует разложению формулы Спитцера по степеням $T_i m_e / T_e m_i$ с сохранением двух первых членов. В многокомпонентной плазме правую часть (2.34) нужно просуммировать по всем сортам ионов.

Оценим теперь погрешности в (2.34), связанные с предположением о точной максвелловости функции распределения электронов. Согласно (2.30) ионы передают основную часть энергии медленным электронам, что должно приводить к их «перегреву» и соответственно к уплощению электронной функции распределения в области малых скоростей по сравнению с максвелловской. С другой стороны, частые столкновения электронов между собой стремятся восстановить максвелловское распределение и тем самым перераспределить избыточную

энергию между медленными и быстрыми электронами. Относительное отклонение f_e от максвелловского при малых скоростях должно быть порядка отношения τ_e к характерному времени изменения T_e . Согласно (2.34) величина этого отношения имеет масштаб $\epsilon_i m_e / T_e m_i$ и составляет в типичных условиях пробочных ловушек 10^{-2} . Приведенная оценка находится в хорошем согласии с результатами численных расчетов работы [15]. Погрешность порядка $\epsilon_i m_e / T_e m_i$, связанная с подстановкой в первое слагаемое (2.33) максвелловского выражения для f_e , частично компенсируется учетом в (2.33) второго слагаемого, которое при максвелловском распределении отрицательно и также имеет относительную величину порядка $\epsilon_i m_e / T_e m_i$.

Оценим величины ϵ_i / T_e и $e\Phi_0 / T_e$ в простейшем, но довольно характерном для простых пробочных ловушек случае, когда баланс энергии электронов определяется только нагревом от ионов и продольными потерями. Учитывая равенство продольных потерь электронов и ионов и пренебрегая слабой зависимостью от пробочного отношения, с помощью (2.18), (2.19) и (2.34) приходим к следующим приближенным соотношениям:

$$\frac{e\Phi_0}{T_e} \approx \left(\frac{T_e}{\epsilon_i} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \sim \frac{T_e}{e\Phi_0} \exp \left\{ -\frac{e\Phi_0}{T_e} \right\}. \quad (2.35)$$

Для водородной плазмы (2.35) дает $(e\Phi_0 / T_e) \approx 5,3$, $(\epsilon_i / T_e) \approx 8,8$, для дейтерий-тритиевой плазмы эти величины составляют соответственно 6 и 11. Таким образом, в простой пробочной ловушке при отсутствии дополнительного нагрева электронов должен иметь место сильный разрыв между средней энергией ионов и электронов. В условиях реального эксперимента этот разрыв может оказаться еще большим. Дело в том, что ионы, уходящие из ловушки вдоль силовых линий, имеют энергию, превышающую $e\Phi_0$, в результате чего они могут выбивать из стенки вторичные электроны, которые затем ускоряются пристеночной разности потенциала, и попадают в плазму. Приток вторичных электронов в плазму должен быть скомпенсирован повышенными потерями электронов с тем, чтобы сохранить квазинейтральность плазмы. Таким образом, к рассмотренным выше потерям энергии добавляется процесс обмена электронами между плазмой и стенкой, при котором электрон плазмы, имеющий в центральном сечении ловушки энергию $(e\Phi_0 + T_e)$, заменяется электроном стенки с энергией $e\Phi_0$. Для подавления вторичной эмиссии и соответственно повышенного электронного теплообмена со стенкой в работе [16] предлагается использовать так называемый «запробочный расширитель», в котором магнитное поле и электрический потенциал быстро убывают в направлении от пробки к стенке.

Коротко основные результаты данного параграфа можно сформулировать следующим образом. Получены сравнительно простые аналитические выражения, позволяющие достаточно полно описать классические продольные потери электронов в простой пробочной ловушке, а также обмен энергией между ионами и электронами. Относительная погрешность полученных выражений не превышает нескольких процентов, что позволяет использовать их при проведении детальных расчетов баланса частиц и энергии в ловушке. В отсутствие дополнительного нагрева электронов их равновесная температура примерно на порядок ниже средней энергии ионов.

§ 3. Удержание ионов в простых пробочных ловушках

Первоначальный анализ классических ионных потерь в простых пробочных ловушках был проведен в основополагающих работах Будкера, Йорка и Поста [1, 2]. В дальнейшем различными авторами было выполнено большое число работ, которые уточнили и существенно дополнили первоначальные представления о величине классических ионных потерь. Сразу следует отметить, что значительное отличие функции распределения ионов от максвелловской и нелинейность уравнения Фоккера—Планка не позволяют рассчитывать на получение достаточно точных количественных результатов при использовании только аналитических методов. Поэтому важную роль в расчетах ионных потерь занимают численные методы.

Прежде чем перейти к анализу ионных потерь, выпишем конкретный вид уравнения Фоккера—Планка для ионов. Для простоты будем рассматривать один сорт ионов с $Z_i=1$ и ограничимся приближением квадратной ямы. Далее удобно ввести эффективную температуру ионов $T_i=2e_i/3$ и $v_{Ti}=\sqrt{2T_i/m_i}$, а также привести ионную функцию распределения f_i , функцию g_i и само уравнение Фоккера—Планка к безразмерному виду, вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F(x, \mu, t) &= v_{Ti}^3 f_i/n; & Q(x, \mu, t) &= v_{Ti}^3 S_i/n; \\ G &= g_i/nv_{Ti}; & x &= v/v_{Ti}; \\ \tau_i &= \sqrt{m_i} T_i^{3/2}/\sqrt{2} \pi n e^4 \Lambda_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

При вычислении g_e можно полагать электронную функцию распределения максвелловской и ограничиться первыми двумя членами разложения g_e по параметру $m_e T_i/m_i T_e$, что точно соответствует приближению, которое было использовано в § 2 при анализе обмена энергией между ионами и электронами. В результате уравнение (1.12) принимает вид:

$$\begin{aligned} \tau_i \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\tau_i}{n} F \frac{dn}{dt} - \frac{\tau_i}{v_{Ti}} \frac{dv_{Ti}}{dt} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^3 F) &= \widehat{C}_i(F) + Q + \\ + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Lambda_{ie}^e}{\Lambda_i} \left(\frac{m_e T_i^3}{m_i T_e^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^3 F \left(1 - \frac{3m_e T_i}{5m_i T_e} x^2 \right) \right] &+ \\ + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Lambda_e}{\Lambda_i} \left(\frac{m_e T_i}{m_i T_e} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta_x F. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины Λ_e , Λ_i , Λ_{ie}^e определены в предыдущем параграфе, Δ_x обозначает лапласиан в x -пространстве, а выражение для ион-ионного столкновительного члена $\widehat{C}_i(F)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_i(F) = & \frac{1}{2x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial x} \left(\frac{G}{x} \right) - \right. \\ & \left. - F \frac{\partial}{\partial x} \Delta_x G \right] + \frac{1}{2x^2} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \left[\frac{\partial F}{\partial x} x \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial x} \left(\frac{G}{x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial \mu} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial G}{\partial \mu} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) - F \frac{\partial}{\partial \mu} \Delta_x G \right]. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Функции G и $\Delta_x G$ можно записать в следующей интегральной форме:

$$\left. \begin{aligned} G &= \int_0^\infty \xi^2 d\xi \int_0^1 d\mu' F(\xi, \mu') 4qE(p/q); \\ \Delta_x G &= \int_0^\infty \xi^2 d\xi \int_0^1 d\mu' F(\xi, \mu') \frac{8}{q} K(p/q); \\ p &= 2(x\xi)^{1/2} [(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)]^{1/4} \\ q &= [x^2 + \xi^2 - 2x\xi(\mu\mu' - \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2})]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где $E(\xi)$ и $K(\xi)$ — полные эллиптические интегралы.

Функцию G , а соответственно, и $\Delta_x G$ можно также представить в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} G = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi P_{2k}(\mu)}{(1 - 16k^2)} \left[\int_0^1 P_{2k}^2 d\mu \right]^{-1} \left\{ \int_0^x \frac{\xi^{2(k+1)}}{x^{2k-1}} \left(1 - \frac{4k-1}{4k+3} \frac{\xi^2}{x^2} \right) d\xi \times \right. \\ & \times \int_0^{\mu_{\text{ГР}}(\xi)} F(\xi, \mu') P_{2k}(\mu') d\mu' + \int_x^\infty x^{2k} \xi^{(3-2k)} \left(1 - \frac{4k-1}{4k+3} \frac{x^2}{\xi^2} \right) d\xi \times \\ & \left. \times \int_0^{\mu_{\text{ГР}}(\xi)} F(\xi, \mu') P_{2k}(\mu') d\mu' \right\}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Представление (3.5) часто оказывается более удобным, чем (3.4). В частности, из него вытекает выражение (2.1), использованное в предыдущем параграфе.

Предпоследний член в правой части (3.2) описывает торможение ионов на медленных электронах. В терминологии работы [10] этот член соответствует динамическому трению на электронах. Как было показано в § 2, при классических потерях энергии равновесная температура электронов примерно на порядок меньше $T_{\text{и}}$, и в этом случае рассматриваемый член оказывается одного порядка с $\widehat{C}_i(F)$. При наличии дополнительных каналов остывания электронов отношение T_i/T_e может заметно превышать $(m_i/m_e)^{1/3}$, в результате чего торможение ионов на электронах начинает играть доминирующую роль в уравнении (3.2).

Последний член в правой части (3.2) описывает диффузию ионов в пространстве скоростей, возникающую вследствие рассеяния на них максвелловских электронов. Относительная величина этого члена по сравнению с главными членами правой части (3.2) не превышает 10 %, в результате чего диффузия ионов на электронах не играет принципиальной роли и может рассматриваться как поправка.

Уравнение (3.2) должно быть дополнено условием обращения F в нуль на границе области удержания ионов в пространстве скоростей. Вопрос о форме границы области удержания ионов обсуждался в § 1, где, в частности, отмечалось, что точная граница имеет довольно сложный вид, зависящий от продольного профиля потенциала. Поэтому обычно рассматривают упрощенную форму границы области удержания в виде конуса (1.1) или гиперболоида (1.3). Во введенных выше безразмерных переменных области удержания (1.1) и (1.3) принимают следующий вид:

$$\mu^2 \leq \mu_{\text{гp}}^2 = (R - 1)/R; \quad 0 \leq x < \infty; \quad (3.6)$$

$$\mu^2 \leq \mu_{\text{гp}}^2 = \frac{R - 1}{R} - \frac{1}{R x^2} \frac{e\Phi_0}{T_i}; \quad \frac{e\Phi_0}{T_i (R - 1)} \leq x < \infty. \quad (3.7)$$

Поскольку точная граница области удержания занимает промежуточное положение между границами областей (3.6) и (3.7), можно ввести также некоторую «эффективную» область удержания, заменив в (3.7) Φ_0 на $\Phi_{\text{эф}} < \Phi_0$. При этом в диапазоне умеренных пробочных отношений $2 \leq R \leq 6$ довольно хорошей аппроксимацией $\Phi_{\text{эф}}$ является $\Phi_{\text{эф}} = \Phi_0/2$. Она учитывает тот факт, что изменение потенциала в основном объеме плазмы составляет примерно $\Phi_0/2$, и остальное изменение потенциала происходит непосредственно в пробке и на отрезке силовой линии от пробки до стенки.

Численным расчетам классических потерь ионов посвящено большое количество работ. Двумерность уравнения (3.2) в x -пространстве, довольно громоздкий вид оператора $\hat{C}(F)$ и функции G , а также необходимость усреднения правой части (3.2) по периоду осцилляций частиц между пробками в случае произвольного профиля магнитного поля делают задачу о классических потерях ионов весьма сложной в вычислительном плане. Поэтому первоначальные расчетные модели, как правило, включали ряд упрощающих предположений, влияние которых затем анализировалось в последующих работах. Не останавливаясь подробно на всех работах, проследим основные этапы развития расчетных моделей.

На первом этапе расчеты велись в приближении квадратной ямы и не учитывали столкновений ионов с электронами, а также влияния амбиполярного потенциала. Основные результаты, относящиеся к этому этапу, изложены в работе [17]. Ко второму этапу можно отнести работу [18], где был развит метод усреднения кинетического уравнения по периоду осцилляций между пробками, позволивший рассматривать произвольные конфигурации магнитного поля. Кроме того, в [18] был развит приближенный метод

решения уравнения Фоккера—Планка для ионов, основанный на разделении переменных x и μ . На третьем этапе в приближении квадратной ямы и разделяющихся переменных были учтены столкновения ионов с электронами и амбиполярный потенциал [19, 20]. Полные двумерные (т. е. без разделения переменных x и μ) расчеты ионных потерь, учитывающие перечисленные факторы, были выполнены в работе [21].

Согласно результатам работы [18], в широком интервале изменений профиля магнитного поля от косинусоидального до профиля типа квадратной ямы ион-ионный столкновительный член, усредненный по периоду осцилляций между пробками [см. (1.11)], с хорошей точностью может быть заменен его значением в центральном сечении. Другими словами, при произвольном профиле магнитного поля в простой пробочной ловушке для ион-ионного столкновительного члена можно использовать выражение, соответствующее приближению квадратной ямы. Погрешность в величине потоков частиц и энергии в конус потерь при этом не превышает нескольких процентов. Этот нетривиальный факт не вытекает непосредственно из вида $\hat{C}_i(F)$, а является некоторым интегральным свойством решения уравнения Фоккера—Планка с соответствующим граничным условием. Качественно его можно понять как примерную взаимокompенсацию следующих двух факторов — снижения частоты столкновений по мере удаления от центрального сечения и одновременного увеличения $\partial f_i / \partial \mu$. С другой стороны, согласно [18], эффективный вид источника ионов, приведенного к центральному сечению [см. (1.11)], существенно зависит от профиля магнитного поля. Это необходимо учитывать при расчетах, так как плотность плазмы в стационарном состоянии весьма чувствительна к угловому распределению приведенного источника. Последнее обстоятельство довольно очевидно, поскольку ионы, инжектированные в ловушку с $|\mu| \ll \mu_{гр}$, теряются значительно медленнее, чем ионы с $|\mu| \sim \mu_{гр}$.

Среди других факторов на ионные потери наиболее сильно влияют столкновения ионов с электронами и изменение границы области удержания, связанное с наличием амбиполярного потенциала. Согласно работам [19—21], в стационарном состоянии при $R \approx 3$ учет этих факторов снижает величину $n\tau_{\parallel}^i$ примерно в 6 раз, где τ_{\parallel}^i — ионное время жизни. Основной вклад в снижение величины $n\tau_{\parallel}^i$ вносит учет динамического трения ионов об электроны, уменьшающего равновесную температуру ионов при $T_i/T_e \sim \sim (m_i/m_e)^{1/3}$ примерно в 2 раза. Влияние амбиполярного потенциала несколько слабее. Соответствующее изменение границы области удержания приводит к относительному увеличению потерь низкоэнергичных ионов, что, в свою очередь, увеличивает среднюю энергию ионов в ловушке и тем самым частично компенсирует возрастание потерь. Следует заметить, что авторы [19—21] рассматривали наиболее пессимистичную модель с областью удержания ионов (3.7). Замена в (3.7) Φ_0 на $\Phi_{эф} \approx \Phi_0/2$ заметно ослабляет

влияние амбиполярного потенциала на ионные потери. Как остывание ионов на электронах, так и влияние амбиполярного потенциала сильно зависят от T_i/T_e . При $T_i/T_e \geq (m_i/m_e)^{1/3}$ доминирует эффект остывания, при $T_i/T_e < (m_i/m_e)^{1/3}$ более существенно влияние амбиполярного потенциала.

Рассмотрим, как профиль магнитного поля влияет на процесс остывания ионов на электронах. В приближении квадратной ямы этот процесс описывается предпоследним членом в уравнении (3.2). Поскольку остывание ионов на электронах не связано с рассеянием по углу, в усреднении ион-электронного столкновительного члена по периоду осцилляций между пробками основную роль играет уменьшение частоты ион-электронных столкновений при удалении от центрального сечения ловушки. Интегрально этот эффект можно учесть заменой операции усреднения ион-электронного столкновительного члена простым умножением его величины в центральном сечении на следующий коэффициент:

$$\int \frac{n^2(s)}{B(s)} ds / n_0 \int \frac{n(s)}{B(s)} ds. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что при указанной замене в соответствии с (2.34) сохраняется энергия, передаваемая от ионов к электронам, в результате чего погрешности конечных результатов, связанные с такой заменой, не превышают нескольких процентов.

Приведенные выше рассуждения указывают на то, что приближение квадратной ямы в простой пробочной ловушке дает довольно хорошую аппроксимацию как для ион-ионного столкновительного члена, так и, с учетом множителя (3.8), для ион-электронного столкновительного члена. Этот вывод, как уже отмечалось, подтверждается результатами численных расчетов. Усреднение источника ионов по периоду осцилляций между пробками не представляет большой сложности, так как источник является заданной функцией скорости и координаты s .

В целях упрощения ион-ионного столкновительного члена часто используют так называемое приближение изотропных потенциалов Розенблюта — Трубникова, которое состоит в замене функции $G(x, \mu)$ в выражении (3.3) ее усредненным по углу значением $\bar{G}(x)$. Основой для такого приближения служит тот факт, что функции G и $\Delta_x G$ значительно слабее зависят от μ , чем сама функция распределения F . Это непосредственно следует из выражения (3.5), согласно которому \bar{G} представляет собой коэффициент при $P_0(\mu) \equiv 1$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}(x) &\equiv \int_0^1 G(x, \mu) d\mu = \int_0^x x\xi^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{3x^2}\right) \bar{F}(\xi) d\xi + \\ &+ \int_x^\infty \xi^3 \left(1 + \frac{x^2}{3\xi^2}\right) \bar{F}(\xi) d\xi; \\ \bar{F}(x) &= 4\pi \int_0^{\mu_{\text{гп}}(x)} F(x, \mu) d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

В результате замены G на \bar{G} выражение для $\widehat{C}_i(F)$ принимает следующий вид:

$$\widehat{C}_i(F) = \frac{1}{2x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} - F \frac{\partial}{\partial x} \Delta x \bar{G} \right) + \frac{\partial \bar{G}}{2x^2 \partial x} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu}. \quad (3.10)$$

Важно подчеркнуть, что при замене G на \bar{G} не нарушаются законы сохранения числа частиц и энергии.

Если пренебречь влиянием амбиполярного потенциала на границу области удержания, то $\mu_{\text{гp}}$ перестает зависеть от x , и уравнение (3.2) с $\widehat{C}_i(F)$ в форме (3.10) допускает разделение переменных x и μ . В этом случае $F(x, \mu)$ можно представить в виде

$$F(x, \mu, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x, t) M_k(\mu), \quad (3.11)$$

где $M_k(\mu)$ — собственные функции уравнения Лежандра:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial M_k(\mu)}{\partial \mu} + \lambda_k (\lambda_k + 1) M_k(\mu) = 0, \quad (3.12)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$(\partial M_k / \partial \mu)_{\mu=0} = 0; \quad M_k(\mu_{\text{гp}}) = 0. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.11) в уравнение (3.2), домножая его на $M_j(\mu)$ и интегрируя по μ , с учетом ортогональности функций $M_k(\mu)$ нетрудно получить уравнение для определения каждой из функций $X_j(x, t)$. Согласно анализу, проведенному в работе [18], удержание первых шести членов в (3.11), как правило, обеспечивает необходимую точность численных расчетов. Более того, в ряде случаев можно ограничиться рассмотрением только нулевого члена разложения (3.11). Так, в задаче без источника или с источником, имеющим плавное распределение по μ , близкое к $M_0(\mu)$, функция $F(x, \mu, t)$ за время, меньшее τ_i , релаксирует к виду $X_0(x, t) M_0(\mu)$. Близость угловой зависимости $F(x, \mu, t)$ при $x \sim 1$ к $M_0(\mu)$ имеет место и в том случае, когда рассматривается полное двумерное решение уравнения (3.2) без замены G на \bar{G} (см. [18]).

Таким образом, функция $M_j(\mu)$ и соответствующие им собственные значения λ_j играют важную роль в анализе нонных потерь. В общем случае $M_j(\mu)$ не выражаются через элементарные функции и могут быть представлены в виде ряда:

$$\left. \begin{aligned} M_j(\mu) &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l(\lambda_j) \left(\frac{\mu^2}{2} \right)^l; \\ a_l(\lambda_j) &= \prod_{k=0}^{l-1} \frac{(2k - \lambda_j)(2k + 1 + \lambda_j)}{(k + 1)(2k + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

При $\lambda_j = 2k$, где $k = (j+1); (j+2); \dots$, ряд (3.14) имеет конечное число членов, и в этом случае функция $M_j(\mu)$ с точностью до постоянного множителя равна $P_{2k}(\mu)$. При $\lambda_j = 2k+1$, где $k = j; (j+1); \dots$, функция $M_j(\mu)$ с точностью до

постоянного множителя может быть выражена через линейно-независимое по отношению к $P_{2k+1}(\mu)$ решение уравнения Лежандра:

$$M_j(\mu) = AP_{2k+1}(\mu) \int \frac{d\mu}{(1-\mu^2)P_{2k+1}^2(\mu)}; \quad \lambda_j = 2k + 1. \quad (3.15)$$

Зависимость первых четырех собственных значений λ_j от $\mu_{гр} = (1-R^{-1})^{1/2}$ приведена на рис. 6. Наибольший интерес представляет низшее собственное значение λ_0 , которое в основном и определяет ионные потери. В диапазоне типичных пробочных отношений λ_0 дважды (при $R=1,5$ и $R \approx 3,28$) принимает целочисленные значения. Для удобства аналитических оценок полезно привести выражения для $M_0(\mu)$, соответствующие этим значениям R :

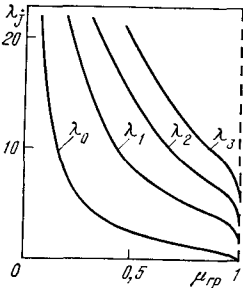
$$R = 1,5; \quad \lambda_0 = 2; \quad M_0(\mu) = 1 - 3\mu^2; \quad (3.16)$$

$$R \approx 3,28; \quad \lambda_0 = 1; \quad M_0(\mu) = 1 - \frac{\mu}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}. \quad (3.17)$$

Приведем также полученное в работе [22] простое эмпирическое соотношение, определяющее зависимость λ_0 от R в интервале $1,4 \leq R < \infty$ с точностью до 3%:

$$\lambda_0(\lambda_0 + 1) \approx (\lg R)^{-1}. \quad (3.18)$$

Рис. 6. Зависимость первых четырех собственных значений λ_j от $\mu_{гр}$



Подробное описание конкретных разностных схем, применяемых при решении уравнения Фоккера—Планка для ионов, можно найти в обзорах [23, 24], специально посвященных этому вопросу. В дополнение к указанным обзорам следует отметить, что в последнее время получили развитие так называемые полностью консервативные разностные схемы, которые строятся так, чтобы законы сохранения, присущие исходным уравнениям, точно выполнялись и в их разностном аналоге независимо от шага разностной сетки. Для уравнения Фоккера—Планка такими законами сохранения являются обсуждавшиеся в § 1 законы сохранения частиц и энергии. Использование неконсервативных разностных схем приводит к появлению фиктивных источников частиц и энергии, пропорциональных квадрату шага разностной сетки. Фиктивные источники могут вносить значительные систематические погрешности даже при очень малом шаге, в особенности если интересоваться поведением системы на больших временных интервалах, превышающих время столкновений. В частности, они могут приводить к физически неверным результатам, таким, как отсутствие стационарного состояния и уменьшение энтропии в замкнутой системе [25]. Полностью консервативные разностные схемы лишены указанных недостатков и позволяют получать достаточно точные результаты даже при относительно грубой сетке, что весьма существенно при выполнении двумерных расчетов. Описание полностью консервативных разностных схем для решения уравнения Фоккера—Планка приведено в следующих работах: [26]—одномерная (с разделением переменных) задача с изотропной G ; [27—29]—двумерная задача с изотропной G ; [30]—полная двумерная задача.

Перейдем теперь к непосредственному анализу уравнения (3.2) и выводу соотношений, описывающих ионные потери. При этом

для большей наглядности ограничимся приближенными аналитическими моделями для функции распределения. В конкретных случаях полученные ниже соотношения могут быть уточнены численным решением уравнения (3.2).

Первое приближенное аналитическое выражение для ионных потерь было получено в работе Г. И. Будкера [1]. Вывод этого выражения с подробным обсуждением приведен также в работе [11]. Г. И. Будкер рассмотрел стационарное состояние со специально подобранной функцией источника Q , при которой функция распределения ионов имела вид $F = \psi(\mu) \exp\{\mu^2\}$. При такой функции распределения и замене G на \bar{G} , как нетрудно убедиться с помощью (3.10), в операторе $\hat{C}_i(F)$ отличен от нуля только член, содержащий производные по μ . В работе [1] также не учитывались столкновения ионов с электронами и влияние амбиполярного потенциала. При таком подходе задача сводилась к нахождению угловой части функции распределения $\psi(\mu)$. Будкер рассмотрел два предельных случая углового распределения функции источника: 1) узкий источник, пропорциональный $\delta(\mu)$; 2) широкий источник изотропный в пределах области удержания. Были получены соответственно два выражения для времени жизни ионов:

$$(\tau_{\parallel}^i)_1 = 0,72\tau_i \ln R; \quad (\tau_{\parallel}^i)_2 \approx 0,72\tau_i \ln(R/1,8). \quad (3.15)$$

Результаты последующих численных расчетов показали, что (3.19) правильно отражает зависимость τ_{\parallel}^i от R и от ширины углового распределения источника. Однако специфическая зависимость функции источника от переменной x оказала заметное влияние на числовой коэффициент в (3.19) и, что более существенно, на ионную температуру, входящую в τ_i . Согласно [1], T_i должно в 2,3 раза превышать среднюю энергию инжектируемых ионов $\epsilon_{\text{инж}}$. Это связано с тем, что в модели Будкера $Q \sim x^{-2}$ при $x \rightarrow 0$, т. е. источник ионов сильно обогащен в области малых энергий. При рассмотрении более реалистичного источника и учете остывания ионов на электронах величина $T_i/\epsilon_{\text{инж}}$, как правило, оказывается в 2—3 раза ниже, что приводит к значительному уменьшению τ_{\parallel}^i по сравнению с моделью Будкера.

Не конкретизируя вид $F(x, \mu, t)$, рассмотрим некоторые общие интегральные соотношения, характеризующие баланс числа ионов и их энергии в ловушке. Чтобы избежать слишком громоздких выражений, пренебрежем влиянием амбиполярного потенциала, последним членом в (3.2), описывающим диффузию ионов на электронах, и поправкой порядка $m_e T_i / m_i T_e$ в предпоследнем члене (3.2). Указанные эффекты качественно не влияют на последующие результаты и могут лишь изменить числовой коэффициент в пределах 20—30%. Интегрируя уравнение (3.2) по объему области удержания (3.6) с весом 1 и x^2 , получаем уравнения баланса числа ионов и энергии:

$$dn/dt = -vn/\tau_i + I; \quad (3.20)$$

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_i}{dt} = T_i \frac{n}{\tau_i} \left(\frac{3}{2} v - \gamma - 3\rho \right) + I \left(\varepsilon_{\text{инж}} - \frac{3}{2} T_i \right). \quad (3.21)$$

Безразмерные коэффициенты $v(t)$, $\gamma(t)$, $\rho(t)$ имеют следующий вид:

$$v = -2\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial G}{\partial \mu} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (1 - \mu)^2 \frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{\text{гр}}}; \quad (3.22)$$

$$\gamma = -2\pi \int_0^{\infty} x dx \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial G}{\partial \mu} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) (1 - \mu)^2 \frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{\text{гр}}}; \quad (3.23)$$

$$\rho = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Lambda_{i1}^e}{\Lambda_i} \left(\frac{m_e T_i^3}{m_i T_e^3} \right)^{1/2}. \quad (3.24)$$

$I = \int S dv$ представляет собой количество ионов, поступающих в единицу времени в единицу объема; $\varepsilon_{\text{инж}}$ — средняя энергия инжектируемых частиц. Коэффициенты v и γ характеризуют потери частиц и энергии вследствие рассеяния в конус потерь, ρ — остывание ионов на электронах. При произвольном профиле магнитного поля выражение для ρ следует домножить на коэффициент (3.8). В рамках упрощенной модели, предполагающей, что G можно заменить на \bar{G} , а угловая зависимость функции $F(x, \mu, t)$ определяется низшей собственной функцией $M_0(\mu)$, коэффициенты v и γ имеют наиболее простой вид:

$$v = \frac{\lambda_0 (\lambda_0 + 1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \bar{F}(x, t) \frac{\partial \bar{G}(x, t)}{\partial x}; \quad (3.25)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_0 (\lambda_0 + 1)}{2} \int_0^{\infty} x dx \bar{F}(x, t) \frac{\partial \bar{G}(x, t)}{\partial x}, \quad (3.26)$$

где \bar{G} и \bar{F} определены выражениями (3.9).

При выводе (3.20), (3.21) были использованы условия нормировки $F(x, \mu, t)$, соответствующие выбранному способу приведения уравнения (3.2) к безразмерному виду:

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x, t) x^2 dx = 1; \quad \int_0^{\infty} \bar{F}(x, t) x^4 dx = 3/2. \quad (3.27)$$

С помощью (3.27) можно доказать, что $3v/2 > \gamma$. Если v и γ определяются выражениями (3.25), (3.26), то указанное неравенство вытекает из следующего соотношения:

$$\frac{3}{2} v - \gamma = -\frac{\lambda_0(\lambda_0 + 1)}{2} \int_0^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^3} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} \right) \right] \times \\ \times \int_0^x \xi^2 \left(\frac{3}{2} - \xi^2 \right) \bar{F}(\xi) d\xi, \quad (3.28)$$

поскольку выражение в квадратных скобках в (3.28), в соответствии с (3.9), всегда отрицательно, а внутренний интеграл в (3.28) с учетом (3.27) всегда положителен. Указанное неравенство означает, что средняя энергия ионов, покидающих ловушку, ниже тепловой. Наиболее сильно это проявляется в модели Будкера, где $\gamma = 0,43 v$. В другом предельном случае, когда $F(x, \mu, t)$ близко к δ -функции по энергии, $\gamma \rightarrow 3v/2$.

В соответствии с (3.20), (3.21) при $I \neq 0$ плотность и средняя энергия ионов должны релаксировать к стационарному состоянию:

$$n = I\tau_{\parallel}^i / v; \quad T_i = \epsilon_{\text{инж}} \frac{v}{\gamma + 3\rho}. \quad (3.29)$$

В стационаре τ_{\parallel}^i по определению имеет следующий вид:

$$\tau_{\parallel}^i = n/I = \tau_i / v. \quad (3.30)$$

Из выражения (3.30), с учетом (3.25) и (3.18), следует, в частности, логарифмическая зависимость τ_{\parallel}^i от R . Далее (3.29) показывает, что остывание ионов на электронах существенно влияет на величину $T_i/\epsilon_{\text{инж}}$. Без учета остывания ($\rho = 0$) средняя энергия ионов в ловушке должна примерно в 2 раза превышать $\epsilon_{\text{инж}}$. Однако уже при классических потерях энергии электронов, как следует из результатов § 2, $\rho \approx 0,15 \div 0,2$ и $3T_i/2 \leq \epsilon_{\text{инж}}$. Появление дополнительных каналов энергетических потерь электронов увеличивает параметр ρ и соответственно еще больше уменьшает величину $T_i/\epsilon_{\text{инж}}$. С помощью (3.29) стационарную плотность ионов можно выразить через параметры источника:

$$n = \left(\frac{I \sqrt{m_i} \epsilon_{\text{инж}}^{3/2}}{\sqrt{2} \pi e^4 \Lambda_i} \right)^{1/2} \frac{\bar{v}^{1/4}}{(\gamma + 3\rho)^{3/4}}. \quad (3.31)$$

Приведем также выражение для $(n\tau_e)^i$, которое характеризует удерживающие свойства ловушки с точки зрения термоядерных приложений:

$$(n\tau_e)^i = \frac{3T_i}{2\epsilon_{\text{инж}}} n\tau_{\parallel}^i = \frac{3\sqrt{m_i} \epsilon_{\text{инж}}^{3/2}}{2\sqrt{2} \pi e^4 \Lambda_i} \frac{v^{3/2}}{(\gamma + 3\rho)^{3/2}}. \quad (3.32)$$

В отсутствие источника ионов уравнения (3.20), (3.21) описывают свободный распад ионной компоненты плазмы. Наиболее просто и наглядно основные особенности этого процесса можно проследить при условии, что T_i/T_e не зависит от t . Постоянство T_i/T_e должно иметь место в тех случаях, когда T_e определяется

нагревом от ионов, в частности при классическом балансе энергии электронной компоненты (см. § 2). При $T_i/T_e = \text{const}$ уравнение (3.2) для $F(x, \mu, t)$ имеет стационарное решение ($\partial F/\partial t = 0$), которому соответствуют не зависящие от времени значения ν, γ, ρ . Поскольку (3.2) относится к уравнениям параболического типа, функция $F(x, \mu, t)$, независимо от ее начального вида, должна релаксировать за время $\leq \tau_i$ к этому стационарному состоянию. Уравнение для стационарной функции $F(x, \mu)$, с учетом сделанных выше упрощающих предположений, имеет следующий вид:

$$\widehat{C}_i(F) + \nu F + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \nu - \gamma \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^3 F) = 0. \quad (3.33)$$

Рассматриваемое стационарное состояние безразмерной функции $F(x, \mu)$ соответствует автомодельному режиму эволюции полной функции распределения ионов $f_i^l(\nu, \mu, t)$, при котором вся зависимость f_i от t сводится к зависимости от времени только плотности и средней энергии ионов. Выход на автомодельный режим впервые был обнаружен при проведении численных расчетов эволюции f_i в работе [18].

Умножая (3.21) на τ_i/nT_i , (3.20) на τ_i/n и вычитая одно из другого, приходим при $I=0$ к следующему соотношению:

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho, \quad (3.34)$$

которое показывает, что в автомодельном режиме τ_i линейно меняется со временем:

$$\tau_i(t) = \tau_{i0} + \left(\frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho \right) t. \quad (3.35)$$

Причем в зависимости от знака $(5\nu/2 - \gamma - 3\rho)$ $\tau_i(t)$ либо неограниченно растет, либо обращается в нуль за конечное время. Это и определяет характер распада плазмы. Если $5\nu/2 \neq \gamma + 3\rho$, то n и T_i меняются либо по степенному закону, либо обращаются в нуль за конечное время:

$$n = n_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho \right) \frac{t}{\tau_{i0}} \right]^{-\zeta_n}; \quad \zeta_n = \frac{\nu}{\frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho}; \quad (3.36)$$

$$T_i = T_{i0} \left[1 + \left(\frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho \right) \frac{t}{\tau_{i0}} \right]^{\zeta_T}; \quad \zeta_T = \frac{2 \left(\frac{3}{2} \nu - \gamma - 3\rho \right)}{3 \left(\frac{5}{2} \nu - \gamma - 3\rho \right)}.$$

Причем n всегда убывает со временем, а T_i либо растет, либо убывает в зависимости от знака $(3\nu/2 - \gamma - 3\rho)$. Если $5\nu/2 = \gamma + 3\rho$, то изменение n и T_i носит экспоненциальный характер:

$$n = n_0 \exp \left\{ -\frac{\nu}{\tau_{i0}} t \right\}; \quad T_i = T_{i0} \exp \left\{ -\frac{2\nu}{3\tau_{i0}} t \right\}. \quad (3.37)$$

Следует отметить, что без учета остывания ионов на электронах ($\rho=0$) классический распад плазмы согласно (3.36) должен всегда идти по степенному закону с возрастанием T_i во времени.

Таким образом, как стационарное состояние, так и свободный распад ионной компоненты плазмы существенно зависят от относительной величины трех безразмерных параметров ν , γ , ρ . Параметр ρ определяется балансом энергии электронной компоненты. Два других параметра ν и γ определяются видом функции F и зависят, главным образом, от пробочного отношения. В общем случае параметры ν и γ можно найти только численным решением соответствующего уравнения для функции F . Тем не менее в ряде случаев функцию $F(x, \mu)$ можно довольно аккуратно смоделировать некоторым аналитическим выражением и далее с помощью (3.21), (3.22) или (3.25), (3.26) получить приближенные выражения для ν и γ . Вследствие интегральной зависимости ν и γ от F полученные таким путем значения ν и γ содержат значительно меньшую неточность, чем исходная модель для $F(x, \mu)$.

Сравнительно просто функцию $F(x, \mu)$ можно смоделировать в автономном режиме распада. Как отмечалось выше, в этом режиме угловая зависимость $F(x, \mu)$ достаточно хорошо описывается нижней собственной функцией $M_0(\mu)$. Другими словами, $F(x, \mu)$ можно представить в виде

$$F(x, \mu) \approx \bar{F}(x) M_0(\mu) / 4\pi \int_0^{\mu_{\text{Гр}}} M_0(\mu) d\mu. \quad (3.38)$$

Далее проанализируем вид $\bar{F}(x)$ при $x^2 \ll 1$ и $x^2 \gg 1$. С помощью (3.9), (3.10) нетрудно убедиться, что при $x^2 \ll 1$ основную роль в уравнении (3.33) играют рассеяние в конус потерь и диффузия по x , так что приближенный вид $\bar{F}(x)$ можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{\lambda_0(\lambda_0 + 1)}{x^2} \bar{F} \approx 0, \quad (3.39)$$

согласно которому \bar{F} должна быть пропорциональна x^{λ_0} . При $x^2 \gg 1$ рассеяние по углу перестает играть доминирующую роль и вид функции $\bar{F}(x)$ определяется в основном балансом между диффузией по x и эффективным динамическим трением:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \nu - \gamma \right) x^3 \right] \bar{F} + \frac{1}{2x} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right\} + \nu \bar{F} \approx 0. \quad (3.40)$$

При $\lambda_0 \rightarrow 0$ параметры ν и γ также должны стремиться к нулю. В этом случае уравнение (3.40) определяет максвелловский хвост функции распределения: $\bar{F} \sim \exp\{-x^2\}$. Когда $\nu \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, решение уравнения (3.40) при $x^2 \gg 1$ имеет следующий асимптотический вид:

$$\bar{F} \sim \left[1 + \frac{(3\nu - 2\gamma)}{6} x^3 \right]^{\frac{2\nu}{9\nu - 6\gamma}} \exp \left\{ -x^2 - \frac{3\nu - 2\gamma}{15} x^5 \right\}. \quad (3.41)$$

Таким образом, в области малых энергий $\bar{F}(x)$ должна расти пропорционально x^{λ_0} , а в области больших энергий убывать несколько быстрее, чем $\exp\{-x^2\}$. Нетрудно убедиться, что сравнительно простая модельная функция

$$\bar{F}(x) = 2 \left(1 + \frac{\lambda_0}{3}\right)^{(3+\lambda_0)/2} x^{\lambda_0} \exp\left\{-\left(1 + \frac{\lambda_0}{3}\right) x^2\right\} / \Gamma\left(\frac{3+\lambda_0}{2}\right) \quad (3.42)$$

удовлетворяет как указанным качественным требованиям, так и условиям нормировки (3.27). Как и следовало ожидать, при $\lambda_0 \rightarrow 0$ (3.42) переходит в максвелловскую функцию, а при $\lambda_0 \rightarrow \infty$ в δ -функцию. Более того, если с помощью (3.42) вычислить параметры ν и γ и подставить их в уравнение (3.33), то нормированное решение уравнения (3.33), полученное численными методами, во всем интервале $0 < x^2 \leq 4$ отличается от (3.42) менее чем на 10 %. При $x^2 > 4$ относительное отклонение (3.42) от точного решения уравнения (3.33) становится довольно значительным, однако эта область не вносит сколько-нибудь существенного вклада в основные интегральные соотношения. Таким образом, (3.42) является довольно хорошей аналитической моделью функции распределения и может быть использована для получения различных интегральных соотношений. В частности, она может оказаться весьма полезной при анализе возможных кинетических неустойчивостей плазмы в простых пробочных ловушках.

Подставляя модельную функцию (3.42) в (3.25), (3.26) и выполняя операции интегрирования, нетрудно получить выражения для $\nu(\lambda_0)$ и $\gamma(\lambda_0)$. Эти выражения имеют довольно громоздкий вид. Однако в интервале $0,4 \leq \lambda_0 \leq 2$, который соответствует наиболее интересному диапазону пробочных отношений $1,5 \leq R \leq 60$, $\nu(\lambda_0)$ и $\gamma(\lambda_0)$ можно с погрешностью до 5 % аппроксимировать следующими простыми соотношениями:

$$\nu \approx 1,28 \frac{\lambda_0 (\lambda_0 + 1)}{2 + \lambda_0} \approx \frac{1,91}{\ln R + \sqrt{\ln R}}; \quad (3.43)$$

$$\gamma \approx 0,314 \lambda_0 (\lambda_0 + 1) \approx 0,723 / \ln R. \quad (3.44)$$

При наличии источника ионов уравнение для стационарной функции $F(x, \mu)$ имеет вид:

$$\hat{C}_i(F) + \frac{\rho}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^3 F) + Q(x, \mu) = 0. \quad (3.45)$$

Если угловое распределение источника является достаточно плавным, то зависимость F от μ не сильно отличается от $M_0(\mu)$. В этом случае, как и в условиях автомодельного распада плазмы, вид функции $\bar{F}(x)$ при $x^2 \ll 1$ определяется уравнением (3.39), так что в области низких энергий $\bar{F}(x) \sim x^{\lambda_0}$. При $x^2 \gg 1$ вид функции $\bar{F}(x)$ можно найти из приближенного уравнения:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \rho x^3) \bar{F} + \frac{1}{2x} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right] \approx 0, \quad (3.46)$$

согласно которому в области больших энергий

$$\bar{F} \sim \exp\left\{-x^2 - \frac{2}{5} \rho x^5\right\}. \quad (3.47)$$

Сравнение (3.47) и (3.41) показывает, что при $\rho \leq 0,3 \lambda_0$ асимптотический вид $\bar{F}(x)$ в стационарном состоянии не сильно отличается от асимптотического вида $\bar{F}(x)$ в автомодельном режиме. В связи с этим параметры ν и γ в стационарном состоянии с $\rho \leq 0,3 \lambda_0$ и плавным угловым распределением источника довольно хорошо аппроксимируются выражениями (3.43), (3.44). При узком угловом распределении источника, близком к $\delta(\mu)$, выражения (3.43), (3.44) также дают правильную оценку параметров ν и γ при условии замены в них R на $1,5R$. Увеличение ρ относительно слабо влияет на величину ν и γ . Так при $\rho = 3 \div 4$ параметры ν и γ уменьшаются по сравнению с (3.43), (3.44) примерно в 1,5 раза. Таким образом, с учетом указанных поправок выражения (3.43), (3.44) дают довольно аккуратную оценку параметров ν и γ для большинства случаев, представляющих практический интерес.

Выше всюду предполагалось, что в качестве источника ионов выступает процесс ионизации быстрых нейтральных атомов, инжектируемых в ловушку. Это справедливо в условиях возможных термоядерных приложений, когда энергия инжектированных атомов превышает 100 кэВ. При энергии инжекции ниже 100 кэВ наряду с ионизацией необходимо учитывать процесс перезарядки. Хотя перезарядка не меняет полного числа ионов в ловушке, тем не менее она активно влияет на процесс формирования функции распределения, возвращая «разбежавшиеся» в результате диффузии ионы к месту их рождения. Особенно существенную роль перезарядка играет в лабораторной плазме с умеренной энергией инжекции масштаба 10—20 кэВ, поскольку в этом диапазоне энергии сечение перезарядки для водорода и дейтерия примерно в 4—5 раз превосходит сечение ионизации. Не останавливаясь подробно на эффектах, связанных с учетом процесса перезарядки, заметим, что указанный процесс может быть легко включен в изложенную выше схему заменой функции источника $Q(x, \mu)$ в (3.2) следующим выражением:

$$\left(1 + \frac{\tau_{\text{ион}}}{\tau_{\text{пер}}}\right) Q - \frac{\tau_i}{\tau_{\text{пер}}} F(x, \mu),$$

где $\tau_{\text{ион}}$ — время ионизации; $\tau_{\text{пер}}$ — время перезарядки ионов плазмы на нейтральных атомах.

§ 4. Ловушки с улучшенным продольным удержанием плазмы

Изучение основных закономерностей удержания плазмы в простых пробочных ловушках показало, что перспектива использования этих ловушек в качестве основы для термоядерного реактора представляется весьма сомнительной, поскольку даже при классических продольных потерях величина $n\tau_e$ оказывается недостаточной для получения удовлетворительного коэффициента усиления мощности реактора. В связи с этим большое внимание уделяется поискам эффективных путей снижения продольных потерь плазмы в открытых ловушках. С этой точки зрения наиболее

привлекательно выглядят ловушки, в которых между основным объемом плазмы и стенкой, на которую выходят силовые линии, удается создать потенциальный барьер для ионов. По аналогии с удержанием электронов время жизни ионов в таких системах должно экспоненциально расти с увеличением высоты барьера, что и обеспечивает необходимое увеличение $n\tau_e$. В настоящее время известно два типа адиабатических ловушек, в которых для

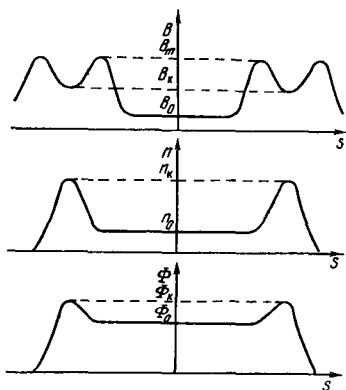


Рис. 7. Продольные профили магнитного поля $B(s)$, плотности $n(s)$ и электрического потенциала $\Phi(s)$ в амбиполярной ловушке

улучшения продольного удержания ионов используется потенциальный барьер. Это — амбиполярные ловушки и ловушки с вращающейся плазмой.

Амбиполярные ловушки. Идея амбиполярной или тандемной пробочной ловушки была независимо выдвинута двумя группами авторов [31, 32]. Магнитная система амбиполярной ловушки состоит из длинного центрального соленоида с однородным полем B_0 , на концах которого расположены двойные пробки, образующие небольшие концевые ловушки (рис. 7). Для обеспечения МГД-устойчивости всей ловушки в крайних ловушках имеется дополнительное квадрупольное поле, создающее магнитную яму в поперечном направлении.

Далее предполагается, что с помощью нейтральной инжекции в крайних ловушках поддерживается плазма с плотностью n_K и средней энергией ионов ϵ_K , а центральный соленоид заполнен плазмой с $n_0 \ll n_K$ и $T_i \sim T_e \ll \epsilon_K$. Вследствие положительного потенциала плазмы и высокой продольной теплопроводности электронов их функция распределения, как и в простой пробочной ловушке, должна быть близка к максвелловской, с примерно постоянной по длине температурой. В этом случае, с учетом квазинейтральности и бoльцмановского распределения плотности электронов вдоль магнитного поля, профиль потенциала, как показано на рис. 7, должен качественно повторять профиль плотности.

Удержание высокоэнергичных ионов в крайних ловушках осуществляется, как и в простых пробочных ловушках, благодаря наличию магнитных пробок. Поскольку $\epsilon_K \gg T_e$, влияние продольного электрического поля на удержание высокоэнергичных ионов мало. Это, по существу, и позволяет поддерживать требуемый профиль плотности плазмы. В отличие от высокоэнергичных ионов «теплые» ионы, заполняющие центральную секцию, удерживаются в основном разностью потенциалов между крайней ловушкой и центром:

$$e\Delta\Phi \equiv e(\Phi_K - \Phi_0) = T_e \ln(n_K/n_0) \gg T_i. \quad (4.1)$$

В связи с этим область удержания теплых ионов в пространстве скоростей имеет вид гиперболоида

$$\mu^2 \leq \frac{R_0 - R_K}{R_0} + \frac{R_K}{R_0} \frac{2e\Delta\Phi}{m_i v^2}, \quad (4.2)$$

аналогичного области удержания для электронов

$$\mu^2 \leq \frac{R_0 - 1}{R_0} + \frac{1}{R_0} \frac{2e\Phi_0}{m_e v^2}, \quad (4.3)$$

где $R_0 = B_m/B_0$; $R_K = B_m/B_K$. Более детальное рассмотрение показывает, что (4.2) определяет область удержания ионов, имеющих энергию ниже $e\Delta\Phi R_K/(R_K - 1)$. Ионы с большей энергией отражаются первой пробкой, не достигая центра крайней ловушки, так что для них область удержания имеет вид $\mu^2 \leq (R_0 - 1)/R_0$. Однако отличие области удержания для ионов больших энергий от (4.2) не вносит заметных изменений во время жизни плазмы центральной секции, поскольку в типичных условиях $R_0 \gg R_K$.

Наличие высокого потенциального барьера делает задачу о потерях ионов центральной секции полностью аналогичной задаче о потерях электронов в простой пробочной ловушке (см. § 2). Поэтому изменение плотности ионов и их энергии в центральной секции описывается выражениями, аналогичными по форме выражениям (2.18), (2.19), с заменой в них T_e на T_i , Φ на $\Delta\Phi$, τ_e на τ_i , R на R_0/R_K . Коэффициент α для ионов равен $1/2$, а не 1, как для электронов, поскольку угловым рассеянием ионов на электронах при $T_i \sim T_e$ можно пренебречь.

В работе [13] было показано, что в многокомпонентной плазме, у которой различные компоненты ионов находятся в термодинамическом равновесии между собой ($T_i = T_j$), выражения, аналогичные (2.18), (2.19), могут быть написаны для каждой ионной компоненты. Причем входящие в эти выражения величины τ_i и α_i имеют следующий вид:

$$\frac{1}{\tau_i} = \sqrt{2} \pi e^4 \sum_j \frac{Z_i^2 Z_j^2 n_j \Lambda^{i/j} \sqrt{m_i}}{m_j T_i^{3/2}}; \quad (4.4)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \sum_j Z_j^2 n_j \Lambda^{i/j} / \sum_j \left(\frac{m_i}{m_j} \right) Z_j^2 n_j \Lambda^{i/j}, \quad (4.5)$$

где суммирование ведется по всем сортам ионов. При произвольном профиле магнитного поля операция усреднения величин τ_i и α_i выполняется аналогично тому, как было описано в § 2 для электронов:

$$\bar{\tau}_i^{-1} = \oint \frac{\Delta\Phi ds}{[\Phi_K - \Phi(s)] \tau_i(s)} / \oint \sqrt{\frac{\Delta\Phi}{\Phi_K - \Phi(s)}} ds; \quad (4.6)$$

$$\bar{\alpha}_i = \oint \frac{\alpha_i(s) B_0 \Delta\Phi \bar{\tau}_i ds}{B(s) [\Phi_K - \Phi(s)] \tau_i(s)} / \oint \sqrt{\frac{\Delta\Phi}{\Phi_K - \Phi(s)}} ds. \quad (4.7)$$

Продольные потери электронов в амбиполярной ловушке, как и в простой пробочной ловушке, определяются выражениями (2.18), (2.19). При этом остаются в силе рассмотренные в § 2 обобщения этих выражений, учитывающие многокомпонентность плазмы и произвольный профиль магнитного поля. Полный энергобаланс электронной компоненты включает нагрев электронов от горячих ионов, удерживаемых в крайних ловушках, и обмен энергией между электронами и теплыми ионами центральной секции. Оба эти процесса могут быть описаны с помощью соотношения (2.34). В отличие от простой пробочной ловушки в амбиполярной ловушке нагрев горячими ионами входит в энергобаланс электронов с малым весом $n_K L_K R_K / n_0 L_0 R_0$, где L_K и L_0 — эффективные длины крайней ловушки и центральной секции. В отсутствие дополнительного нагрева электронов это приводит к значительному уменьшению отношения T_e / e_K по сравнению со случаем простой пробочной ловушки. Другая отличительная черта в поведении электронной компоненты в амбиполярной ловушке связана с наличием группы электронов, захваченных в крайних ловушках. Появление этой группы обусловлено тем, что потенциальный барьер для ионов одновременно является потенциальной ямой для электронов. Поскольку захваченные электроны все время находятся в крайних ловушках, они подвержены более интенсивному нагреву от горячих ионов, чем пролетные электроны. В результате, несмотря на сравнительно быстрый теплообмен внутри электронной компоненты, температура захваченных электронов должна быть несколько выше, чем температура основной группы электронов. Это приводит к улучшению удержания ионов центральной секции, поскольку потенциальный барьер для ионов пропорционален температуре именно захваченных электронов. Для усиления этого эффекта в работе [33] была выдвинута идея «теплового барьера», которая предусматривает создание искусственного понижения потенциала между центральной секцией и крайней ловушкой с целью снижения теплообмена между основной группой электронов и электронами, захваченными в крайних ловушках.

Удержание горячих ионов в крайних ловушках не отличается от рассмотренного в § 3 удержания ионов в простой пробочной ловушке, за исключением того, что параметр ρ в крайней ловушке может более чем на порядок превышать величину, типичную для классической схемы простой пробочной ловушки. Согласно [31], в амбиполярной ловушке без «термического барьера» и дополнительного нагрева $\rho \geq 1 \div 2$. Большое значение параметра ρ сильно ухудшает энергобаланс крайней ловушки. Однако крайние ловушки, ввиду их относительно малого объема, не должны оказывать большого влияния на коэффициент усиления мощности амбиполярного термоядерного реактора [31, 32]. С этой точки зрения крайние ловушки представляют собой лишь сложные пробки, позволяющие существенно улучшить удержание ионов в центральной секции.

Выше обсуждалась продольные потери электронов и теплых ионов центральной секции, соответствующие случаю редких столкновений, когда время пролета частиц вдоль ловушки много меньше времени заполнения гиперболоида потерь. Для теплых ионов и электронов условие слабой столкновительности имеет следующий вид:

$$\tau_i \frac{R_K}{R_0} \left(\frac{e\Delta\Phi}{T_i} \right)^{3/2} \gg L_0 \sqrt{\frac{m_i}{2e\Delta\Phi}}; \quad (4.8)$$

$$\tau_e \frac{1}{R_0} \left(\frac{e\Phi_0}{T_e} \right)^{3/2} \gg L_0 \sqrt{\frac{m_e}{2e\Phi_0}}. \quad (4.9)$$

При параметрах плазмы, характерных для амбиполярного реактора, условия (4.8), (4.9) выполняются с большим запасом [31, 32]. Однако в экспериментальных установках с относительно низкой энергией частиц ($T_i \sim T_e \sim 100 \div 200$ эВ) условия (4.8), (4.9) могут не выполняться. В этом случае соотношения (2.18), (2.19) и аналогичные выражения для ионных потерь становятся несправедливыми.

В предельном случае частых столкновений, когда выполняются условия, обратные (4.8), (4.9), функция распределения частиц близка к максвелловской не только в области удержания, но и внутри гиперболоида потерь. При этом продольные потери из центральной секции определяются газодинамическими потоками частиц, вытекающими через соответствующие потенциальные барьеры в крайних ловушках. Вычисляя указанные потоки, нетрудно получить следующие выражения для времени жизни теплых ионов и электронов:

$$\tau_{\parallel}^i = \frac{R_0}{R_K} L_i \sqrt{\frac{\pi m_i}{2T_i}} \exp \left\{ \frac{e\Delta\Phi}{T_i} \right\}; \quad (4.10)$$

$$\tau_{\parallel}^e = R_0 L_e \sqrt{\frac{\pi m_e}{2T_e}} \exp \left\{ \frac{e\Phi_0}{T_e} \right\}. \quad (4.11)$$

где L_i и L_e — эффективные длины ловушки соответственно для ионов и электронов:

$$L_{i,e} = \int (B_0 n_{i,e}(s) / B(s) n_0) ds. \quad (4.12)$$

Вычисляя также поток энергии, найдем среднюю энергию, выносимую каждым ионом и электроном из плазмы:

$$\langle \varepsilon \rangle_i = e\Delta\Phi + 2T_i; \quad \langle \varepsilon \rangle_e = e\Phi_0 + 2T_e. \quad (4.13)$$

Заметим, что в пределе частых столкновений надбарьерная энергия составляет $2T$, а не T , как в пределе редких столкновений (2.20).

Переходная область между редкими и частыми столкновениями исследовалась в работе [34]. Расчеты, проведенные по методу Монте-Карло, показали, что время жизни в переходной области хорошо описывается простой интерполяционной формулой:

$$\tau_{\parallel} \approx \tau_{\parallel \text{ред}} + \tau_{\parallel \text{част}}, \quad (4.14)$$

где $\tau_{\parallel \text{ред}}$ — время жизни в пределе редких столкновений, а $\tau_{\parallel \text{част}}$ — в пределе частых столкновений. Столь же простой интерполяционной формулой мо-

жет быть описана и средняя энергия, уносимая частицами из ловушки:

$$\langle \varepsilon \rangle = e\Phi + \left(\frac{2\tau_{\parallel \text{ част}} + \tau_{\parallel \text{ ред}}}{\tau_{\parallel \text{ част}} + \tau_{\parallel \text{ ред}}} \right) T. \quad (4.15)$$

Ловушки с вращающейся плазмой. Ловушками с вращающейся плазмой обычно называют аксиально-симметричные открытые ловушки, в которых наряду с продольным магнитным полем имеется

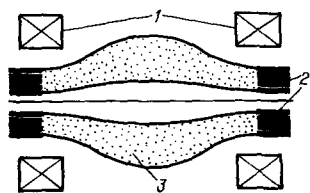


Рис. 8. Простейшая схема ловушки с вращающейся плазмой:

1 — катушки с током; 2 — коаксиальные электроды; 3 — плазма

сильное радиальное электрическое поле E , приводящее к вращению плазмы со скоростью cE_{\perp}/B . Простейшая ловушка с вращающейся плазмой, схематически изображенная на рис. 8, представляет собой аксиально-симметричную пробочную ловушку, на торцах которой расположена система коаксиальных электродов, контактирующих с плазмой. Для формирования нужного радиального профиля электрического поля в плазме на каждый из электродов независимо подается соответствующее высокое напряжение.

Основные принципы удержания плазмы в ловушках с вращающейся плазмой, а также результаты начальной стадии экспериментальных исследований на ловушках этого типа подробно изложены в обзоре [35]. Дальнейшее развитие исследований по этому классу ловушек, включающее анализ реакторных перспектив, отражено в работе [36]. Наряду с традиционной схемой ловушки с вращающейся плазмой рассматривают также ее модифицированный вариант — центробежную ловушку [37], которая имеет ряд технических преимуществ по сравнению с традиционной схемой.

Коротко остановимся на основных принципах продольного удержания частиц в ловушках с вращающейся плазмой. Вследствие аксиальной симметрии ловушки магнитные силовые линии и дрейфовые траектории частиц лежат на поверхностях, определяемых условием постоянства магнитного потока $\Psi(r, z) = \text{const}$ (см. § 1). Поскольку продольный профиль плотности плазмы мало меняется при переходе с одной поверхности $\Psi = \text{const}$ на другую, а продольный профиль потенциала связан с плотностью соотношением Больцмана (1.5), разность потенциалов между соседними поверхностями $\Psi = \text{const}$ в основном объеме плазмы остается примерно постоянной по длине силовой линии:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} \right|_{\Psi = \text{const}} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Из (4.16) вытекает так называемый «закон изоротации» [35], согласно которому частота вращения плазмы вокруг магнитной оси ловушки Ω_E постоянна на дрейфовой поверхности:

$$\Omega_E = (cE_{\perp}/rB)_{\Psi = \text{const}} \approx \text{const}. \quad (4.17)$$

В связи с этим удержание плазмы удобно рассматривать во вращающейся системе координат, где на частицы действует центробежная сила $m r \Omega_E^2$, стремящаяся вытолкнуть их в область, где дрейфовая поверхность имеет максимальный радиус.

С учетом сохранения энергии и J_{\perp} область удержания ионов во вращающейся системе координат имеет вид:

$$v_{\parallel 0}^2 \leq v_{\perp 0}^2 (R - 1) + V_{E0}^2 \left(1 - \frac{r_m^2}{r_0^2} \right) - \frac{2e\Phi_0}{m_i}, \quad (4.18)$$

где $V_{E0} = cE_0/B_0$; r_m — радиус поверхности $\Psi = \text{const}$ в пробке. Правая часть (4.18) по сравнению с (1.3) содержит дополнительный член, который при $r_m < r_0$ можно назвать центробежным барьером. В простейшей схеме ловушки, изображенной на рис. 8, $r_m^2 = r_0^2 B_0/B_m$, так что $r_0^2/r_m^2 = R$.

В общем случае аксиально-симметричная конфигурация магнитного поля может быть выбрана так, что параметры r_m^2/r_0^2 и B_m/B_0 будут независимы. В частности, r_m^2/r_0^2 можно сделать достаточно малым даже при $B_m \leq B_0$. Это обстоятельство легло в основу центробежной ловушки [37]. Для краткости ограничимся рассмотрением простейшей схемы ловушки с вращающейся плазмой, которая тем не менее дает довольно полное представление об особенностях продольного удержания плазмы в ловушках этого класса.

Для того чтобы существенно улучшить удержание ионов по сравнению с простой пробочной ловушкой, V_{E0}^2 согласно (4.18) должно удовлетворять следующему условию:

$$V_{E0}^2 > \frac{2R}{m_i (R - 1)} (e\Phi_0 + T_i). \quad (4.19)$$

В этом случае граница области удержания ионов представляет собой поверхность двухполостного гиперболоида (рис. 9) с вершиной в точке $v_{\perp} = 0$; $v_{\parallel} = \tilde{v}_{\Phi} > \sqrt{2T_i/m_i}$, где

$$\tilde{v}_{\Phi} = \left(\frac{R-1}{R} V_{E0}^2 - \frac{2e\Phi_0}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (4.20)$$

С увеличением $m_i \tilde{v}_{\Phi}^2 / 2T_i$ время жизни ионов, как и в центральной секции амбиполярной ловушки, должно расти экспоненциально.

В рассматриваемой ловушке довольно оригинально решается вопрос о нагреве ионов. Для этого достаточно вводить в ловушку нейтральные атомы с пренебрежимо малой энергией. Во вращаю-

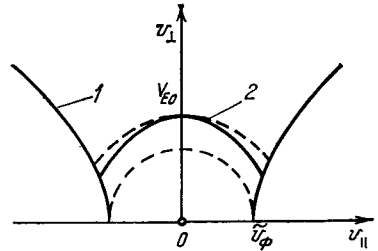


Рис. 9. Область удержания ионов в ловушке с вращающейся плазмой:

1 — граница области удержания; 2 — «поверхность источников»

щейся системе координат эти атомы вращаются с частотой Ω_E в сторону, противоположную вращению плазмы в лабораторной системе. При ионизации нейтральных атомов образуются ионы с $v_{\perp} = V_E$, $v_{\parallel} = 0$, что эквивалентно инъекции высокоэнергичных нейтральных атомов в обычных открытых ловушках. Ион, образовавшийся в некоторой точке на силовой линии, где магнитное поле равно B^* , с учетом сохранения энергии и J_{\perp} имеет в центральном сечении ловушки следующие значения $v_{\perp 0}$ и v_0 :

$$v_{\perp 0} = V_{E0} \frac{B_0}{B^*}; \quad v_0^2 = V_{E0}^2 - \frac{2e}{m_i} (\Phi_0 - \Phi^*) > \tilde{v}_{\Phi}^2. \quad (4.21)$$

Таким образом, источники ионов, приведенные к центральному сечению, располагаются в пространстве скоростей на некоторой «поверхности источников», изображенной на рис. 9. Причем энергия «инъекции» превышает высоту эффективного потенциального барьера для ионов, что обеспечивает поддержание стационарного состояния без дополнительного нагрева плазмы.

Поскольку $V_{E0}^2 \ll v_{Te}^2$, действием центробежных сил на электроны можно пренебречь. Поэтому удержание электронов в ловушке с вращающейся плазмой качественно не отличается от удержания электронов в простой пробочной ловушке, за исключением некоторого увеличения параметра $e\Phi_0/T_e$, необходимого для поддержания баланса частиц в условиях пониженных ионных потерь.

Наличие эффективного потенциального барьера для ионов указывает на возможность приближенного описания ионных потерь соотношениями (2.18), (2.19) с заменой в них электронных параметров соответствующими ионными. Однако такое описание в условиях ловушки с вращающейся плазмой не вполне корректно, так как наличие источника заметно искажает функцию распределения ионов в области $v \geq \tilde{v}_{\Phi}$. Численные расчеты, проведенные с помощью разработанной для этого случая полностью консервативной разностной схемы [29, 37], показывают, что при наличии источника ионные потери должны в 1,5—2 раза превышать оценку, полученную с помощью модифицированных выражений (2.18), (2.19).

Специфический механизм нагрева плазмы, обусловленный ее вращением, накладывает определенные связи между величинами V_{E0} , R и основными параметрами плазмы. Действительно, приравняв в стационарном состоянии энергию, уносимую из ловушки парой ион и электрон энергии инъекции, с помощью (2.20), (4.20) и (4.21) приходим к следующему соотношению:

$$T_i + T_e \approx m_i V_{E0}^2 / 2R. \quad (4.22)$$

Далее, согласно результатам численных расчетов, приведенных в [36], $T_e \approx 0,035 m_i V_{E0}^2$ для всех $R \geq 2$, так что при $R \leq 6$ величиной T_e в (4.22) можно пренебречь. По этой же причине можно пренебречь величиной $2e\Phi_0/m_i$ в (4.20) и получить следующее

выражение для относительной высоты ионного потенциального барьера:

$$(m_i \tilde{v}_\Phi^2 / 2T_i) \approx (R - 1), \quad (4.23)$$

которое показывает, что при $T_i = \text{const}$ величина $n\tau_\parallel^e$ в ловушке с вращающейся плазмой должна расти экспоненциально с увеличением R :

$$n\tau_\parallel^e = \frac{3n\tau_\parallel^i}{2R} \sim n\tau_i e^R \ln R. \quad (4.24)$$

Таким образом, ловушки с вращающейся плазмой с точки зрения классических продольных потерь выглядят весьма привлекательно и, в принципе, могут обеспечить достаточно большой коэффициент усиления мощности термоядерного реактора. Тем не менее в исследованиях по этим системам имеется еще ряд сложных и весьма специфических проблем, главные из которых — обеспечение МГД-устойчивости с учетом симметрии и вращения и поддержание в плазме нужного профиля радиального электрического поля с напряженностью ~ 100 кВ/см.

Многopробочные ловушки. В заключение данного параграфа коротко остановимся еще на одной возможности снижения продольных потерь плазмы в открытых адиабатических ловушках. По существу речь пойдет о достаточно длинных ловушках с плотной плазмой, работающих в режиме частых столкновений, когда полная длина ловушки L удовлетворяет условию $L \gg v_{Ti}\tau_i/R$. Поскольку подобные системы в данном обзоре подробно не рассматривались, ограничимся лишь простейшими оценками, поясняющими существо дела. Тем не менее следует отметить, что обсуждение многopробочных ловушек в данном обзоре не является случайным, так как принцип продольного удержания плазмы в этих ловушках использует некоторые свойства пробочных ловушек, работающих в режиме редких столкновений.

Рассмотрим длинную систему, представляющую собой цепочку последовательно соединенных пробочных ловушек (рис. 10), каждая из которых имеет длину l и пробочное отношение $R = B_m/B_0 \gg 2$. Полная длина системы $L = Nl$, где $N \gg 1$. Пусть рассматриваемая система заполнена плазмой с такой плотностью и температурой ионов, что выполняются следующие условия:

$$l \leq \frac{v_{Ti}\tau_i}{R} \ll L. \quad (4.25)$$

В каждой отдельной ловушке имеются как захваченные ионы, осциллирующие между пробками вследствие сохранения энергии и J_\perp , так и пролетные. Причем захваченные ионы согласно (4.25) должны совершить по крайней мере несколько колебаний между

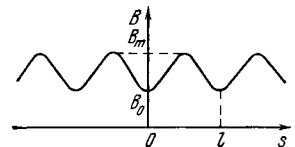


Рис. 10. Продольный профиль магнитного поля в многopробочной ловушке

пробками, прежде чем в результате столкновений перейдут в пролетные.

Продольный перенос частиц и энергии осуществляется только пролетными частицами, которые, в отличие от захваченных, должны иметь макроскопическую скорость V_{\parallel} , направленную от центра к концам системы. За время масштаба τ_i/R , много меньшее времени пролета всей системы, пролетный ион с вероятностью ~ 1 может захватиться в одну из локальных ловушек, а вместо него в разряд пролетных перейдет один из ранее захваченных ионов. В результате такого обмена продольный импульс пролетных частиц, отнесенный к единице объема, уменьшится на величину порядка $nm_i V_{\parallel}/R$. Этот импульс переходит к захваченным ионам, которые за время l/v_{Ti} в результате отражения от пробок передают его магнитному полю. Передачу импульса можно интерпретировать как трение пролетных ионов о захваченные и, в конечном счете, о магнитное поле. Наличие трения меняет характер движения плазмы — вместо газодинамического течения в однородном магнитном поле продольный перенос плазмы определяется диффузионным «просачиванием» из одной локальной ловушки в другую.

Макроскопическую скорость V_{\parallel} можно найти, приравняв силу трения $\sim m_i n V_{\parallel} / \tau_i$ градиенту давления пролетных ионов $\sim n T_i / RL$:

$$v_{\parallel} \sim v_{Ti}^2 \tau_i / R L. \quad (4.26)$$

В результате получаем следующую оценку продольного времени жизни в многопробочной системе:

$$\tau_{\parallel} \sim L^2 R^2 / v_{Ti}^2 \tau_i. \quad (4.27)$$

Как и следовало ожидать, диффузионный характер продольных потерь приводит к квадратичной зависимости τ_{\parallel} от L . Согласно (4.27) продольное время жизни в многопробочной системе значительно превосходит как время жизни плазмы в длинной ловушке с простыми пробками на концах $\tau_{\parallel}^L \sim LR/v_{Ti}$, так и время жизни в отдельно взятой короткой ловушке $\tau_{\parallel}^L \sim \tau_i \ln R$.

Первоначальная идея многопробочного удержания была выдвинута в работе [38], где были получены приведенные выше оценки. Детальное теоретическое исследование продольных потерь плазмы в многопробочных системах, основанное на решении кинетических уравнений для ионов и электронов, было проведено в работах [39—41]. Результаты этих работ в целом подтвердили справедливость приведенных выше оценок.

Заключение

Подводя итог, можно сказать, что к настоящему времени теория продольных классических потерь плазмы в открытых адиабатических ловушках разработана достаточно полно и включает в

себя как качественное понимание основных физических процессов, так и хорошо развитые методы их описания. Это позволяет проводить не только детальный анализ уже известных типов ловушек, но и оценку возможных перспектив вновь предлагаемых систем. Конечно, при этом надо иметь в виду, что классические продольные потери являются всего лишь одним из возможных каналов потерь плазмы и в конечном итоге могут не играть доминирующей роли. Тем не менее надежное понимание классических механизмов придает исследованиям любой системы для удержания плазмы (по крайней мере на начальной стадии) большой или меньший «запас оптимизма». Данный обзор, конечно, не мог вместить в себя подробное рассмотрение всех вопросов, связанных с классическими продольными потерями плазмы в открытых ловушках различных типов. Однако можно надеяться, что изложенные в нем идеи и методы будут полезны при решении многих конкретных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будкер Г. И.— В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 3.
2. Бишоп А. С. Проект Шервуд. Программа США по управляемому термоядерному синтезу: Пер. с англ./Под ред. Л. А. Арцимовича. М.: Атомиздат, 1960, с. 48.
3. Сивухин Д. В.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 7.
4. Мирнов В. В., Рютов Д. Д.— Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, с. 678.
5. Юшманов Е. Е.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 49, с. 588.
6. Рютов Д. Д.— Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 1189.
7. Ландау Л. Д.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1937, т. 7, с. 203.
8. Rosenbluth M. N., McDonald W., Judd D.— Phys. Rev., 1957, vol. 107, p. 1.
9. Трубников Б. А.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1958, т. 34, с. 1341
10. Трубников Б. А.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 98.
11. Сивухин Д. В.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, с. 81.
12. Pastukhov V. P.— Nucl. Fusion, 1974, vol. 14, p. 3.
13. Cohen R. H., Rensink M. E., Cutler T. A., Mirrin A. A. Ibid., 1978, vol. 18, p. 1229.
14. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1957 с. 90.
15. Futch A. H., Holdren J. P., Killeen J., Mirrin A. A.— Plasma Phys., 1971, vol. 14, p. 211.
16. Конкашбаев И. К., Ландман И. С., Улинич Ф. Р.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1978, т. 74, с. 256.
17. Bing G. F., Roberts J. E.— Phys. Fluids, 1961, vol. 4, p. 1039.
18. Ben Daniel D. J., Allis W. P.— Plasma Phys. (J. Nucl. Energy, pt C), 1962, vol. 4, p. 31, 79.
19. Fowler T. K., Rankin M.,— Ibid., 1966, vol. 8, p. 121.
20. Kuo-Petravic L. G., Petravic M., Watson C. J. H.— Proc. Intern. Conf. on Nucl. Fusion Reactors, Culham, England, 1969, Paper 2.4.
21. Marx K. D.— Phys. Fluids, 1970, vol. 13, p. 1355.
22. Roberts J. E., Carr M. L. End Losses from Mirror Machines, Rep. UCRL 5651, 1960.

23. Киллин Дж., Маркс К. Д. — В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1974, с. 417.
24. Киллин Дж., Мирин А., Ренсинк М. — В кн.: Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез: Пер. с англ. М.: Мир, 1980, с. 419.
25. Бобылев А. В., Чуянов В. А. — Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, с. 407.
26. Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. — Там же, 1979, т. 19, с. 458.
27. Бобылев А. В., Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. — Докл. АН СССР, 1980, т. 255, с. 1348.
28. Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. — Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, с. 513.
29. Волосов В. И., Пеккер М. С. — Там же, 1980, т. 20, с. 1341.
30. Потапенко И. Ф., Чуянов В. А. — Там же, 1982, т. 22, с. 751.
31. Димов Г. И., Закайдаков В. В., Кишиневский М. Е. — Физика плазмы, 1976, т. 2, с. 597.
32. Fowler T. K., Logan B. G. Comments on Plasma Phys. and Controlled Fusion, 1977, vol. 2, p. 167.
33. Baldwin D. E., Logan B. G. — Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 43, p. 1318.
34. Rognlien T. D., Catler T. A. — Nucl. Fusion, 1980, vol. 20, p. 1009.
35. Lehnert V. — Ibid., 1971, vol. 11, p. 485.
36. Bekhtenev A. A. e. a. — Ibid., 1980, vol. 20, p. 579.
37. Volosov V. I., Pekker M. S. — Ibid., 1981, vol. 21, p. 1275.
38. Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 320.
39. Mirnov V. V., Ryutov D. D. — Nucl. Fusion, 1972, vol. 12, p. 627.
40. Makhijani A., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., Logan B. G. — Phys. Fluids, 1974, vol. 17, p. 1291.
41. Logan B. G., Brown I. G., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. — Ibid., p. 1302.
42. Фирсов О. Б. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 327.
43. Spalding I. J. — Nucl. Fusion, 1968, vol. 8, p. 161.
44. Haines M. G. — Ibid., 1977, vol. 17, p. 811.
45. Сизоненко В. А., Степанов К. Н. — Журн. техн. физ., 1975, т. 45, с. 741.
46. Юшманов Е. Е. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 23.

УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ПЛАЗМЕ*В. И. Коган, В. С. Лисица, Г. В. Шолин***Введение**

Явление уширения спектральных линий состоит в том, что рассматриваемая линия в плазме излучается атомами не в узком спектральном диапазоне порядка естественной ширины (как было бы для одного атома в вакууме), а в существенно более широком интервале частот $\Delta\omega$. Причины, вызывающие уширение линий, связаны с тем, что, во-первых, наблюдаемая линия излучается не отдельным атомом, а целым ансамблем атомов, частоты излучения которых могут быть по ряду причин различными, и, во-вторых, излучающий атом подвергается воздействию внешних полей, создаваемых частицами и волнами в плазме. От конкретной причины уширения зависит как полуширина линии, так и ее форма (профиль), т. е. характер распределения интенсивности по частоте. Интенсивность $I(\omega)$ данной линии можно представить в виде произведения полной (интегральной по спектру) интенсивности I_0 на множитель $J(\omega)$, определяющий форму (профиль линии), так что

$$I(\omega) = I_0 J(\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega = 1. \quad (1.1)$$

Величина I_0 определяется балансом процессов возбуждения и девозбуждения уровней атома, тогда как профиль $J(\omega)$ зависит от более тонких деталей взаимодействия атома с плазмой, исследование которых и является предметом теории уширения.

Отметим, что для процессов уширения интерес представляет узкий диапазон частот $\Delta\omega$, малых по сравнению с невозмущенной частотой линии ω_0 . Поэтому внешние воздействия на атом, вызывающие уширение, являются слабыми по сравнению с внутриатомными параметрами.

Несмотря на отмеченную слабость воздействий, вызывающих уширение, исследование контуров линий имеет весьма важное значение по крайней мере по двум причинам. Во-первых, такое исследование позволяет определить параметры плазмы, такие, как температура, плотность, напряженности электрических и магнитных полей, наличие колебаний и т. д., что, например, для астрофизических объектов является нередко единственным источником информации. Во-вторых, ширина и форма контура сильно влияют на про-

цессы переноса излучения внутри плазмы, его выход из системы, установление равновесия излучения со средой и т. п.

Чувствительность процессов взаимодействия излучения со средой к деталям контуров уширенных линий обусловлена резонансным характером этого процесса. Даже малая расстройка резонанса $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ вызывает резкое падение коэффициентов поглощения излучения.

Процессы уширения качественно можно представить себе, рассматривая возмущение атома как возмущение колебаний классического осциллятора (своеобразного «камертона»), помещенного в плазму. Любое возмущение, нарушающее монохроматичность колебаний осциллятора, приводит к уширению его спектра. Проблема уширения распадается на две части: 1) исследование статистических свойств возмущения, вызывающего уширение; 2) исследование характера воздействия этого возмущения на атом. В соответствии с этим изложение построено следующим образом. В § 2 рассматриваются статистические свойства электрических полей, воздействующих на атом в плазме. В § 3 анализируются характер взаимодействия атома с плазменным микрополем и механизм уширения линий. В § 4 рассмотрена статическая теория уширения линий и отклонения от нее вследствие теплового движения частиц и неоднородности возмущающего поля. В § 5 развивается ударная теория уширения линий электрическими полями волн и частиц. В § 6 рассмотрен переход между ударным и статическим механизмом уширения. Сравнению теории с экспериментом посвящен заключительный § 7.

§ 1. Общие формулы для распределения интенсивности в линии

Рассмотрим систему, состоящую из излучающего атома, возмущающих частиц и поля излучения. В случае, когда движение возмущающих частиц можно описывать классически, гамильтониан системы записывается в виде

$$H = H_1 + H_2 + H_R + V_{12} + V_{1R}, \quad (1.2)$$

где H_1 — гамильтониан излучающего атома; H_R — гамильтониан поля излучения; H_2 — гамильтониан возмущающих частиц; V_{1R} — потенциал взаимодействия атома с полем излучения; V_{12} — потенциал взаимодействия излучателя с окружающими частицами, являющийся функцией времени. Поскольку нас интересует распределение интенсивности линии вблизи ее невозмущенной частоты ω_0 , то взаимодействие поля излучения с возмущающими частицами не учитывается.

Сумма первых трех членов в (1.2) представляет собой невозмущенный гамильтониан системы $H_0 = H_1 + H_2 + H_R$. Ему соответствует полный набор ортонормированных, не зависящих от времени собственных функций вида $\Psi = \Psi_1 \Psi_2 \Psi(\dots n_k \dots)$, где Ψ_1 , Ψ_2 — собственные функции излучателя и возмущающих частиц соответ-

ственно, а функционал $\Psi(...n_k...)$ описывает состояние поля излучения в пространстве чисел заполнения n_k . Пусть в момент $t=0$ система находится в состоянии A , задаваемом волновой функцией $\Psi(0) = \varphi_a(0)\Psi_R(n_k)$. Здесь для краткости φ_a означает произведение φ_1 и φ_2 , а у Ψ_R оставлен только один индекс n_k , относящийся к тому сорту фотонов, которые будут поглощаться. Если взаимодействие $V_{12}(t)$ отсутствует, то задача о поглощении сводится к нахождению вероятности P_{AB} перехода системы из состояния $\varphi_a\Psi_R(n_k)$ в состояние $\varphi_b\Psi_R(n_k - 1)$, которое является стационарным состоянием гамильтониана H_0 в более поздний момент времени $t=T$ [1]. Аргумент $n_k - 1$ указывает, что один фотон k -го сорта поглощен. Наличие взаимодействия $V_{12}(t)$ приводит к тому, что конечное состояние системы уже нельзя описывать произведением $\varphi_b\Psi_R(n_k - 1)$. Взаимодействие $V_{12}(t)$ атома с окружающими частицами является более сильным, чем взаимодействие V_{1R} атома с полем излучения. Поэтому сначала следует найти состояние системы в момент времени $t=T$, определяемое потенциалом взаимодействия $V_{12}(t)$. Если обозначить $\varphi_n(t)$ волновую функцию в момент времени t , которая при $t=0$ совпадает с $\varphi_n(0)$ и подчиняется уравнению Шредингера с гамильтонианом

$$H_m = H_1 + H_2 + V_{12}(t), \quad (1.3)$$

то нетрудно убедиться, что

$$\varphi_n(t) = U_m(t) \varphi_n(0), \quad (1.4)$$

где оператор эволюции $U_m(t)$ подчиняется уравнению

$$i\hbar \dot{U}_m(t) = H_m(t) U_m(t), \quad U_m(0) = 1. \quad (1.5)$$

Вероятность перехода системы в состояние $\Psi(t) = \varphi_b\Psi_R(n_k - 1)$ можно теперь получить, используя оператор эволюции, соответствующий полному гамильтониану:

$$P_{BA} = |\langle \Psi(T) | \hat{U} | \Psi(0) \rangle|^2. \quad (1.6)$$

Поскольку взаимодействием поля излучения с остальной системой пренебрегается, оператор эволюции можно в первом приближении представить в виде произведения $U_m(t)$ на $U_R(t)$, где $U_R(t)$ — оператор эволюции поля излучения, причем $U_m U_R = U_R U_m$. Обозначая $U_{0c} = U_m(t) U_R(t)$, применяя теперь оператор $U_{0c}^{-1}(t)$ к формуле (1.6) и пользуясь методом последовательных приближений:

$$U_{0c}^{-1} U = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^T U_{0c}^{-1} H_{1R} U_{0c} dt, \quad (1.7)$$

получаем:

$$P_{BA} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^T dt e^{+i\omega t} \langle \varphi_b(0) \Psi_R(n_k \pm 1) | U_m^{-1} H_{1R} U_m | \varphi_a(0) \Psi_R(n_k) \rangle \right|^2, \quad (1.8)$$

где $\psi\omega$ — энергия излучаемого (или поглощаемого) фотона.

Используя далее стандартные выражения [1] для матричных элементов взаимодействия атома с полем излучения и плотности состояний поля излучения, в дипольном приближении ($kr \ll 1$) получаем следующее выражение для энергии, излучаемой в единицу времени отдельным атомом:

$$I(\omega) = \frac{\omega^4 (n_k \pm 1)}{4\pi^2 c^3 T} \left| \int_0^T dt e^{i\omega t} \langle \varphi_b(0) | U_m^{-1} \mathbf{d} \mathbf{e}_k U_m | \varphi_a(0) \rangle \right|^2, \quad (1.9)$$

где $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ — дипольный момент атома; \mathbf{e}_k — вектор поляризации фотона с импульсом \mathbf{k} .

Выполняя, наконец, суммирование по всем конечным и усреднение по всем начальным состояниям атома, получим выражение, которое является основным для анализа формы спектральных линий:

$$I(\omega) = \frac{\omega^4 (n_k + 1)}{4\pi^2 c^3 T} \sum_{\mathbf{e}_k} \int_0^T dt \int_0^T dt' e^{i\omega(t-t')} \text{Spur} \{ \rho_0 U_m^{-1}(t) \mathbf{d} \mathbf{e}_k U_m(t) \times \\ \times U_m^{-1}(t') \mathbf{d} \mathbf{e}_k U_m(t') \}. \quad (1.10)$$

Здесь ρ_0 — матрица плотности. Существенным для дальнейшего является предположение о постоянстве ($\rho(t) = \rho_0$) и диагональности этой матрицы по внутренним координатам атома, т. е.

$$U_m(t) \rho_0 = \rho_0 U_m(t); \quad (\rho_0)_{\alpha\alpha'} = P_\alpha \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (1.11)$$

Используя циклические перестановки под знаком Spur , операторы эволюции в (1.10) можно свести к оператору

$$U_m(t \rightarrow t') = U_m^{-1}(t') U_m(t),$$

описывающему эволюцию системы за промежуток времени от t до t' . При фиксированном $\tau = t' - t$ усредненное по столкновениям значение подынтегрального выражения не должно зависеть от начальных и конечных моментов времени и будет определяться лишь длительностью τ . Поэтому двойной интеграл в (1.10) оказывается пропорциональным T и распределение интенсивности в линии или, точнее, мощность излучения в расчете на один атом дается выражением:

$$I(\omega) = \frac{\omega^4 (n_k + 1)}{4\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \text{Spur} \{ \rho_0 (\mathbf{d} \mathbf{e}_k) U_m^{-1}(\tau) (\mathbf{d} \mathbf{e}_k) U_m(\tau) \}. \quad (1.12)$$

Если проинтегрировать (1.12) по частоте ω , то получится, очевидно, полная интенсивность I_0 дипольного излучения атома. Оператор эволюции $U_m(t)$ описывает, таким образом, лишь перераспределение интенсивности по частоте, т. е. контур линии, не влияя на полную интенсивность I_0 . Удобно поэтому выделить контур линии $J(\omega)$ в явном виде. В случае изотропной среды $J(\omega)$ не

зависит от поляризации излучения, так что (1.12) можно усреднить по направлениям вектора \mathbf{e}_k . В результате получим:

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \Phi(\tau); \quad (1.13)$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{|d_{ab}|^2} \operatorname{Spur} [\rho_0 dU_m^{-1}(\tau) dU_m(\tau)]. \quad (1.14)$$

Функция $\Phi(\tau)$, являющаяся фурье-образом контура $J(\omega)$, называется автокорреляционной функцией дипольных моментов атома. Она описывает, очевидно, временную эволюцию атомных состояний. Физический смысл $\Phi(\tau)$ легко понять из следующих простых рассуждений. Если воздействие среды на атом достаточно сильное, то атом быстро «теряет память» о первоначальном состоянии — корреляционная функция быстро затухает, что приводит, очевидно, к большой ширине контура линии $J(\omega)$.

Строго говоря, усреднение должно выполняться как по состояниям атома, так и по состояниям возмущающих частиц. Однако в принятом нами приближении классических траекторий операция Spur в (1.14) заменяется просто усреднением по координатам и скоростям всех возмущающих частиц, которую ниже обозначим символом $\{ \dots \}$. Состояния a и b атома являются, вообще говоря, вырожденными и потому суммирование в (1.3) все еще достаточно сложно; однако в силу отмеченной выше слабости взаимодействия, вызывающих уширение, состояния a и b не перемешиваются возмущением, так что суммирования по подуровням α, α' и β, β' , относящимся к a или b , происходят независимо.

Важным для понимания физических основ процессов уширения является случай, когда возмущение не вызывает переходов между состояниями, т. е. оператор эволюции диагонален:

$$(U_m)_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} \exp(iE_{\alpha}t/\hbar) \exp\left[-i \int^t \kappa_{\alpha}(\tau) d\tau\right], \quad (1.15)$$

где $\kappa_{\alpha}(t)$ — сдвиг частоты состояния α , вызываемый возмущением (например, штарковский сдвиг уровня в электрическом поле).

При этом единственным механизмом уширения являются частотные (фазовые) сдвиги, вызываемые возмущением (частотная модуляция). Здесь атом можно рассматривать как классический осциллятор с модулируемой частотой. Эта модель называется классически адиабатической моделью осциллятора [1]. Контур линии $J(\omega)$ в этой модели имеет особенно простой вид:

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp(i\Delta\omega\tau) \Phi(\tau); \quad (1.16)$$

$$\Phi(\tau) = \left\{ \exp\left[-i \int_0^{\tau} \kappa(t) dt\right] \right\}, \quad (1.17)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ($\omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar$) — сдвиг наблюдаемой частоты ω относительно невозмущенной частоты перехода ω_0 ; $\kappa(t) = \kappa_a - \kappa_b$ — разностный сдвиг фазы верхнего (a) и нижнего (b) состояний атомного осциллятора.

Здесь мы ограничимся изложенной простейшей постановкой задачи об уширении, которая тем не менее оправдала себя с точки зрения получения конкретных практически важных результатов. Связь теории уширения с общей кинетической теорией электромагнитных процессов и обсуждение проблем, связанных с постановкой задачи об уширении линий, можно найти в монографиях [2, 4, 5]. Ниже мы, по необходимости, прибегаем лишь к ограниченному цитированию литературы, исчерпывающий перечень которой приведен в [2, 3].

§ 2. Плазменное микрополе

Распределение Хольцмарка. Электрическое поле, создаваемое ионами и электронами плазмы вблизи излучающего атома, называется *плазменным микрополем*. В теории микрополя (и одновременно — в статической теории уширения линий, см. § 4) фундаментальную роль играет модель Хольцмарка [6]. Речь идет о распределении (в данной точке пространства и в данный момент времени) значений микрополя $F \equiv |\mathbf{F}|$, создаваемого совокупностью \mathcal{N} идеально-беспорядочно расположенных, покоящихся ионов:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{F}_k = e \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{r}_k / r_k^3. \quad (2.1)$$

Вероятность $W(\mathbf{F})d\mathbf{F}$ равна, очевидно, той доле объема конфигурационного пространства ионов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\mathcal{N}}$, в которой выполнено равенство (2.1). Чтобы автоматически выделить эту долю, усредним по конфигурационному пространству соответствующую δ -функцию:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F}) &= \left\langle \delta \left(\mathbf{F} - e \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\rho e^{i\rho\mathbf{F}} \left\langle \exp \left(-ie\rho \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где использовано разложение δ -функции в интеграл Фурье.

Усреднение в (2.2) выполняем (по предположению) по распределению взаимно некоррелированных ионов $\prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{V} \right)$ (V — объем системы). Переходя затем к пределу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ при $\mathcal{N}/V \equiv$

$N \equiv \text{const}(N - \text{плотность числа ионов})$, приходим к цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(-i e \rho \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) \right\rangle &= \int \dots \int \exp \left(-i e \rho \sum_k^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{d\mathbf{r}_k}{V} = \\ &= \left(\int \exp \left(-i e \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} \right) \frac{d\mathbf{r}}{V} \right)^{\mathcal{N}} \equiv \left\{ 1 - \int \frac{d\mathbf{r}}{V} \left[1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \exp \left[-i e \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} \right] \right] \right\}^{\mathcal{N}} \rightarrow \exp \left\{ -N \int d\mathbf{r} \left[1 - \exp \left(-i e \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \right\} = \\ &= \exp \left[-N (\lambda e \rho)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\lambda = 2\pi (4/15)^{2/3} = 2,603$. Подставляя (2.3) в (2.2), выполняя интегрирование по углам вектора ρ и используя (автоматически возникающую) независимость $W(\mathbf{F})$ от направления \mathbf{F} , окончательно находим [6, 7]:

$$W(\mathbf{F}) d\mathbf{F} \equiv W(F) 4\pi F^2 dF = \mathcal{H} \left(\frac{F}{F_0} \right) \frac{dF}{F_0}, \quad (2.4)$$

где введены «натуральный» масштаб ионного микрополя F_0 и функция Хольцмарка \mathcal{H} :

$$F_0 = \lambda e N^{2/3} \quad (\lambda \approx 2,603); \quad (2.5)^*$$

$$\mathcal{H}(\beta) = \frac{2}{\pi} \beta \int_0^{\infty} \sin(\beta x) \exp(-x^{3/2}) dx. \quad (2.6)$$

Функция $\mathcal{H}(\beta)$ нормирована: $\int_0^{\infty} \mathcal{H}(\beta) d\beta = 1$. Ее максимум находится при $\beta = 1,607$, а асимптотики имеют вид:

$$\mathcal{H}(\beta) \approx \begin{cases} 1,496\beta^{-5/2} (1 + 5,107\beta^{-3/2}), & \beta \gg 1; \\ \frac{4}{3\pi} \beta^2 (1 - 0,463\beta^2), & \beta \ll 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

За асимптотику $\beta^{-5/2} \propto F^{-5/2}$ для сильных полей ответствен, как и должно быть, лишь один (ближайший к точке наблюдения) ион: действительно, она непосредственно следует из распределения расстояний r до ближайшего иона, $W(r) dr \propto r^2 dr$ и соотношений $F(r) \propto r^{-2}$, $W(r) dr = W(F) dF$. Асимптотика $\beta^2 \propto F^2$ для слабых полей (создаваемых большим числом ионов) совпадает с асимптотикой распределения Гаусса (точнее, Гаусса — Рэлея). Таким об-

* Отметим, что F_0 численно очень близко к полю $F_{\text{ср}} = e r_0^{-2}$ на среднем межчастичном расстоянии r_0 , определенном соотношением $\frac{4\pi}{3} N r_0^3 = 1$

разом, распределение Хольцмарка (2.4) — (2.6) описывает переход от гауссова распределения слабых полей к «бинарному» распределению сильных полей.

Некоторые обобщения распределения Хольцмарка. Любой выход за рамки упрощающих предположений, заложенных в модель Хольцмарка, делает необходимым соответствующее ее обобщение. Так, учет эффектов взаимной корреляции ионов и экранировка их электрических полей благодаря взаимодействию с электронами существенно усложняет, по сравнению с (2.1)—(2.3) и т. д., структуру распределения $W(\mathbf{F})$. Далее, при использовании распределения микрополя для анализа уширения линий наличие у излучающего атома собственных конечных пространственно-временных масштабов (размеров, времени жизни и др.) в сочетании с тепловым движением уширяющих ионов делает недостаточным само распределение $W(\mathbf{F})$ в одной пространственно-временной точке (или, что эквивалентно, распределение одного лишь микрополя \mathbf{F} без его производных $\dot{\mathbf{F}}, \ddot{\mathbf{F}}, \dots$). Обсудим вкратце соответствующие обобщения распределения Хольцмарка.

А. Уширяющие ионы в плазме взаимодействуют друг с другом посредством экранированных кулоновских потенциалов

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\mathcal{N}}) = \sum_{i=k < l}^{\mathcal{N}} \frac{e^2}{r_{kl}} \exp(-r_{kl}/\rho_D), \quad (2.8)$$

где ρ_D — дебаевский радиус. В равновесной плазме с температурой T вероятность данной ионной конфигурации определяется произведением элемен-

та объема $\prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{V} \right)$ (см. выше) на «больцмановский» множитель

$\exp[-V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\mathcal{N}})/kT]$, учитывающий взаимодействие ионов. Учет этого множителя уменьшает вероятность конфигураций с большим значением V , т. е. с близкими расстояниями между ионами, которым отвечают большие значения микрополя F . Поэтому реальное распределение микрополя должно давать большие вероятности слабых и меньшие вероятности сильных полей по сравнению с распределением Хольцмарка (рис. 1 [8]).

Отклонение от этого распределения определяется, естественно, значением параметра неидеальности плазмы \mathcal{N}_D^{-1} , где $\mathcal{N}_D \equiv \frac{4\pi}{3} N \rho_D^3$ — среднее число ионов в сфере дебаевского радиуса; в конкретных расчетах (в том числе и в отраженных на рис. 1) часто используется параметр $\alpha = N_D^{-1/2} \propto N^{1/2} T^{-1/2}$ — отношение среднего расстояния между ионами $r_0 \left(N \frac{4\pi}{3} r_0^3 = 1 \right)$ к дебаевскому радиусу. Предел $\alpha = 0$ отвечает распределению Хольцмарка; с ростом α отклонения от него растут, и, например, уже при $\alpha = 0,4$ (т. е. $\mathcal{N}_D \simeq 16$) они довольно заметны.

Критерий применимости самой модели Хольцмарка $\mathcal{N}_D \gg 1$ ограничивает, строго говоря, и применимость имеющихся в литературе более общих расчетов распределения плазменного микрополя, так что оценить точность последних в области $\mathcal{N}_D \sim 1$ затруднительно. Подробное изложение эффектов, связанных с кор-

реляцией ионов в плазме, содержится в работах [2, 9, 10].

Б. «Динамическое» обобщение распределения Хольцмарка, учитывающее движение «полевых» частиц, было дано (применительно к проблемам звездной динамики) Чандрасекаром и фон Нейманом [7] в нескольких близких формах. А именно были построены: 1) распределения $W(F, \dot{F})$, $W(F, \ddot{F})$;

2) двухвременное распределение $W(F_1, F_2)$, определяющее вероятность реализации назначений F_1 и F_2 микрополя в данной точке в моменты времени $t=0$ и $t=\tau$; 3) распределение $W(F_1, F_2)$ микрополя в данный момент времени, но в двух точках пространства r_1 и r_2 . Распределения типов 1 и 2 позволяют описать временную динамику ионного микрополя, обусловленную тепловым движением ионов, в терминах моментов соответствующих распределений [7]*. Некоторые из результатов этого анализа будут использованы в § 4.

При построении адиабатической «множественной» теории уширения, основанной на векторном сложении полей движущихся ионов [13], необходимо использовать многовременное распределение $W(F_1, F_2, \dots, F_M)$ микрополя в последовательные, бесконечно близкие $M(M \rightarrow \infty)$ моменты времени.

В. Упомянем, наконец, что оба обобщения А и Б распределения Хольцмарка могут быть «синтезированы» в единой схеме [14].

Распределение ион-электронного микрополя с учетом коллективных эффектов (турбулентных шумов). Перейдем к рассмотрению распределения микрополя, существенного для многих типов реальной лабораторной плазмы. Электрическое микрополе в плазме всегда имеет две компоненты: низкочастотную — F_{ion} , обусловленную ионами, и высокочастотную — F_{el} , обусловленную электронами. В свою очередь, в силу дальнедействующего характера кулоновских сил в каждой из этих компонент микрополя можно выделить коллективную и индивидуальную составляющие, которые можно считать статистически независимыми. Поскольку «высокочастотное» поле действует на атом неадиабатически, то статистика распределения его амплитуд практически не проявляется в профиле линии. Как будет показано ниже, для высокочастотной компоненты основную роль играет функция автокорреляции, или плотность энергии шумов ленгмюровских волн.

В случае линейного эффекта Штарка, когда к описанию уширения применимо статическое приближение (см. § 4), профиль линий пропорционален функции распределения низкочастотной компоненты поля $W(F_{\text{ion}})dF_{\text{ion}}$. При этом существенно, что статическое описание подразумевает возможность выбора промежутка времени Δt , достаточно большого по сравнению с периодом $\tau_e =$

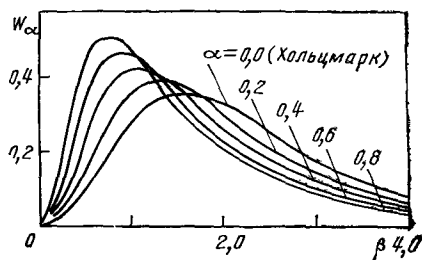


Рис. 1. Распределение микрополя в слабонеидеальной плазме

* Для малых и больших значений τ распределение типа 2 удается считать и в явном виде [11], что позволяет более подробно проследить динамику разрушения и «наведения» корреляции между полями $F(0)$ и $F(\tau)$ [12].

$= 2\pi/\omega_{pe}$ электронных ленгмюровских колебаний и в то же время мало по сравнению с характерным временем изменения конфигурации ионов $\tau_i \sim N^{-1/3}/v_{Ti}$. Более того, поскольку описание неадиабатических эффектов требует усреднения по промежутку времени $2\pi/\omega_{pe} \leq \Delta t \ll \gamma_e^{-1}$, то в характерном гамильтониане, описывающем взаимодействие излучателя с низкочастотной компонентой поля F_{ion} , должны фигурировать поля кулоновских центров, уже усредненные по электронным движениям. Поскольку усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю, то естественно рассматривать результирующую величину F_{ion} как векторную сумму полей, создаваемых зарядами ионов, экранированными на радиусе, определяемом электронной компонентой плазмы: $r_{De} = v_{Te}/\omega_{pe}$. В сказанном нетрудно убедиться, рассмотрев в приближении Дебая — Хюккеля экранировку ионного поля для случая, когда $T_e \gg T_i$ и, более того, когда все другие ионы плазмы можно считать покоящимися ($\Delta t \ll N^{-1/3}/v_{Ti}$). Последнее предположение эквивалентно предельному переходу $T_i \rightarrow 0$ в больцмановском факторе $\exp(-e\phi_i/T_i)$ для распределения плотности ионов вокруг рассматриваемого заряженного центра. В результате $\exp(-e\phi_i/T_i) \rightarrow 0$, и потенциал с точностью до константы определяется функцией Дебая — Хюккеля, в которой экранирующий эффект обусловлен только электронами.

Таким образом, вычисление функции распределения низкочастотных полей сводится к отысканию распределения вероятности результирующего поля одноименно заряженных экранированных кулоновских центров:

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j), \quad \mathbf{F}_j = \frac{e}{r_j^3} \mathbf{r}_j (1 + \kappa_{De} r) \exp(-\kappa_{De} r), \quad (2.9)$$

к которому векторно-аддитивно добавляется результирующее поле коллективных низкочастотных плазменных колебаний. То обстоятельство, что эти два вклада являются статистически независимыми, можно продемонстрировать, следуя методу Бома и Пайнса [15] выделения коллективных координат.

Необходимость обращения к методу коллективных переменных связана с тем известным обстоятельством, что статистическая сумма системы заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, расходится. Если не прибегать к искусственным процедурам обрезания взаимодействия, то этот факт нужно рассматривать как свидетельство невозможности приписывать отдельной заряженной частице свойства гиббсовской подсистемы. Процедуру же выделения коллективных координат можно трактовать именно как способ нахождения ансамблей Гиббса, правильно описывающих гамильтониан системы заряженных частиц:

$$H = \sum_{\alpha, i} \frac{p_{i\alpha}^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, i \neq j} \frac{e_\alpha e_\beta}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.10)$$

Следуя [15], можно с помощью соответствующих канонических преобразований записать гамильтониан (2.10) в виде

$$H = \sum_{\alpha, i} \frac{\mathbf{p}_i^{\prime 2}}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, i \neq j} \frac{e_\alpha e_\beta \exp(-k_c |\mathbf{r}_i'' - \mathbf{r}_j''|)}{|\mathbf{r}_i'' - \mathbf{r}_j''|} + \frac{1}{2} \sum_k (|Q_k''|^2 + \omega_k^2 |P_k''|). \quad (2.11)$$

Здесь ω_k удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$1 = \frac{4\pi}{V} \sum_{i, \alpha} \frac{e_\alpha^2}{\left[\omega_k - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{p}_i'')}{m_\alpha} \right]^2 m_\alpha}. \quad (2.12)$$

Проводя теперь усреднение по электронной компоненте, нетрудно убедиться, что уравнение (2.12) описывает низкочастотную ионно-звучковую ветвь плазменных колебаний, а параметр k_c в гамильтониане (2.11) соответствует электронному дебаевскому радиусу $k_c = \rho_{De}^{-1}$. Таким образом, две слабозаимодействующие подсистемы: экранированные кулоновские центры и коллективные колебания Q_k, P_k — оказываются аналогом одной системы сильно взаимодействующих заряженных частиц. Существенно, что в то время как статистическая сумма и, следовательно, все термодинамические величины для системы заряженных частиц не определены, преобразованный с помощью введения коллективных переменных гамильтониан имеет конечные значения статистической суммы и всех термодинамических величин. Условием, обеспечивающим законность такой замены, в случае низкочастотной ветви колебаний является неравенство

$k < \rho_{De}^{-1}$ при $\omega \approx \omega_{pi}$, или

$$\left\langle \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}''}{m\omega_k} \right)^2 \right\rangle_{\text{ср}} \simeq \frac{T_i}{T_e} \ll 1 \quad (2.13)$$

при $\omega \approx k \sqrt{T_e/m_i} \ll \omega_{pi}$.

Таким образом, распределение низкочастотного микрополя будет определяться общей формулой

$$W(\mathbf{F}) = \int \delta \left(\mathbf{F} - \sum_i \mathbf{F}_i \right) P_N(H) d\mathbf{r}_i'' \dots d\mathbf{p}_k'' \dots, \quad (2.14)$$

где интегрирование ведется по новым каноническим переменным, $\mathbf{r}_i'', \mathbf{p}_i'', \mathbf{Q}_k'', \mathbf{P}_k''$, а гиббсовский фактор определяется как

$$P_N(H) = \frac{\exp(-H/T_i)}{\int \exp\{-H/T_i\} d\mathbf{r}_i'' \dots d\mathbf{p}_k'' \dots}. \quad (2.15)$$

Результирующее микрополе можно представить в виде

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{e}{r_i^3} \mathbf{r}_i (1 + \kappa_{De} r_i) \exp(-\kappa_{De} r_i) + \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} \sum_{k < k_c} \mathbf{Q}_k \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}''), \quad (2.16)$$

где \mathbf{r}'' — координата нейтральной точки наблюдения. Применяя к (2.14) преобразование Фурье, нетрудно убедиться в факторизации спектральных функций для индивидуальной и коллективной составляющих микрополя:

$$W(\mathbf{q}) = \int \exp(i \mathbf{q} \mathbf{F}) W(\mathbf{F}) d\mathbf{F} = W_{\text{ind}}(\mathbf{q}) W_{\text{coll}}(\mathbf{q}), \quad (2.17)$$

где

$$W_{\text{ind}}(\mathbf{q}) = \frac{\int \exp\left\{-i \mathbf{q} \sum_i \frac{e}{r_i^3} \mathbf{r}_i (1 + \kappa_{De} r_i) e^{-\kappa_D r_i} - \sum_i \frac{e^2}{2T_i} \frac{\exp[-\kappa_D |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|]}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\right\} \times \exp\left\{-\frac{e^2}{2T_i} \sum \frac{e^{-\kappa_D |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\right\} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N}{\int \exp\left\{-\frac{e^2}{2T_i} \sum_{k < \kappa_D} \mathbf{Q}_k^2\right\} d\mathbf{Q}_{k_1} \dots d\mathbf{Q}_{k_0}} \times d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (2.18)$$

(интегрирование здесь ведется только по конфигурационному пространству ионов);

$$W_{\text{coll}}(\mathbf{q}) = \frac{\int \exp\left\{-i \mathbf{q} \left(\frac{4\pi}{V}\right)^{1/2} \sum \mathbf{Q}_k e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}} - \frac{1}{2T_i} \sum_{k < \kappa_D} \mathbf{Q}_k^2\right\} d\mathbf{Q}_{k_1} \dots d\mathbf{Q}_{k_0}}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2T_i} \sum_{k < \kappa_D} \mathbf{Q}_k^2\right\} d\mathbf{Q}_{k_1} \dots d\mathbf{Q}_{k_0}} \quad (2.19)$$

(Здесь интегрирование ведется по коллективным координатам, описывающим амплитуды низкочастотных колебаний.) Расчет коллективной части W_{coll} приводит к распределению Рэлея:

$$W_{\text{coll}}(F) = \frac{3F^2}{F_R^3} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left[-\frac{3F^2}{2F_R^2}\right], \quad (2.20)$$

где для ионно-звукового спектра нетрудно получить

$$\frac{F_R^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty F^2 W_{\text{coll}}(F) dF \simeq \frac{1}{4} T_i \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\kappa_{De}} k^2 dk \sim \left(\frac{T_i}{T_e}\right) f(\kappa_{De}).$$

Таким образом, в случае двухтемпературной плазмы плотность энергии ионно-звуковых колебаний оказывается пропорциональной T_i/T_e , т. е. тем меньше, чем выше температура электронов по отношению к температуре ионов. В то же время с увеличением T_e уменьшается роль экранировки зарядов. В сильнонеравновесной плазме плотность энергии колебаний может на много порядков отличаться от своего термодинамически равновесного значения. В этом случае F_R следует рассматривать как некоторый внешний параметр, определяющий степень неравновесности среды.

Индивидуальная составляющая микрополя может быть рассчитана с помощью формулы для $W_{\text{ind}}(\mathbf{q})$, если для функции

$$P_{\mathcal{N}} = \prod_{i,j} \exp \left\{ -\frac{e^2}{2T_i} \frac{\exp[-\kappa_D |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|]}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\}$$

использовать представление через корреляционные функции второго $g_{ij}^s = \exp \left[-\frac{V_{ij}}{T_i} \right] - 1$ и более высоких порядков

$$P_s = \prod_{k(1)} P_1(\mathbf{r}_j) \prod_{k(2)} (1 + g_{je}^s) \prod_{k(3)} (1 + g_{iem}^s) \dots$$

и выразить $W_{\text{ind}}(\mathbf{q})$ через частные функции распределения

$$W_{\text{ind}}(\mathbf{q}) = \sum_{s=0}^N W_{\text{ind}}^s(\mathbf{q})$$

где

$$W_{\text{ind}}^s(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{N}!}{(\mathcal{N} - s!) s!} \int \dots \int \sum \epsilon_j \dots \epsilon_s P_{\mathcal{N}} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s. \quad (2.21)$$

Здесь $\epsilon_k \equiv e^{i\mathbf{q}\mathbf{F}_k} - 1$.

Поскольку ионы отталкиваются друг от друга, то в пределе $T_i \rightarrow 0$ экспоненциальные множители должны обращаться в нуль, так что парная корреляционная функция $g_{ij}^2 \rightarrow -1$, и, следовательно, все P_s для $s \geq 2$ в этом пределе экспоненциально малы.

Пользуясь, далее, предположением о случайности распределения частиц в пространстве $P_1 = 1/V$, что соответствует «газовости» системы, приходим к распределению Эккера — Мюллера [17]:

$$W_{\text{ind}}(\mathbf{q}) = \exp \left\{ \frac{\mathcal{N}}{V} \int [e^{-i\mathbf{q}\mathbf{F}} - 1] d\mathbf{r} \right\}, \quad (2.22)$$

где $\mathbf{F} = -\frac{e\mathbf{r}}{r^3} (1 + \kappa_{De} r) e^{-\kappa_{De} r}$; \mathcal{N} — число экранированных частиц; V — объем системы. Известное распределение Хольцмарка

следует из (2.22) в пределе $T_e \rightarrow \infty$, или $n_{De} \rightarrow 0$. Более того, нетрудно убедиться, что результирующее распределение, являющееся сверткой $W_{\text{ind}}(F)$ и $W_{\text{coll}}(F)$, в пределе $T_e \rightarrow \infty$, $(T_i/T_e) \rightarrow 0$ также переходит в распределение Хольцмарка, если низкочастотные шумы имеют тепловой уровень, соответствующий температуре ионов.

Таким образом, распределение Хольцмарка действительно соответствует пренебрежению тепловым движением ионов. Естественно, что в W_{ind} из-за экспоненциальной малости бoльцмановского фактора в парной корреляционной функции при $T_i \rightarrow 0$ не проявляются также и ион-ионные корреляции. Главный эффект таких корреляций заключается в существовании отличного от нуля теплового (или надтеплового) уровня ионно-звуковых шумов, который влияет на результирующее распределение полей. Это влияние может быть достаточно просто учтено в случае двухтемпературной плазмы с ионно-звуковыми шумами, определяемыми температурой T_i . Как легко убедиться, отношение масштабов амплитуд индивидуального и коллективного полей $\alpha = F_H/F_R$ оказывается при этом достаточно большой величиной:

$$\alpha = \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi^5}{36}\right)^{1/12} \left(\frac{T_e}{e^2 N^{1/3}}\right)^{1/4} \gg 1, \quad (2.23)$$

так что на большей части распределения можно считать выполненным соотношение $\alpha\beta \gg 1$, где $\beta = F/F_H$. Результирующее распределение микрополя, являющееся сверткой $W_{\text{ind}}(F)$ и $W_{\text{coll}}(F)$ для $\beta \gg \alpha^{-1}$, представляется тогда в виде

$$W(\delta) \approx W_{\text{ind}}(\beta) \left\{ 1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{11/12} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2} \left(\frac{e^2 N^{1/3}}{T_e}\right)^{1/4} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \beta \frac{d}{d\beta} \ln W_{\text{ind}}(\beta) \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Как видно из этого соотношения, наиболее существенные изменения претерпевает область достаточно малых $1/\alpha \ll \beta \leq 1$, где поправочный член существенно положителен. При этом само распределение и его максимум несколько смещаются в область $\beta \leq 1$. Этого и следовало ожидать, поскольку взаимные корреляции ионов стремятся в первую очередь уменьшить вероятность сильных полей. Замечательно, что в предельном случае $(T_i/T_e) \rightarrow 0$ поправка, обусловленная ион-ионными корреляциями, также исчезает. Обратный предельный случай $(T_i/T_e) \rightarrow \infty$ (при значении T_e конечном, но не слишком малом, так что число частиц в сфере дебаевского радиуса велико $N\rho^3_{De} \gg 1$) привел бы, как нетрудно убедиться, рассматривая свойства интеграла свертки:

$$W_{RH} = \alpha\beta \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{3}{2}\alpha^2(\beta - u)^2\right] - \exp\left[-\frac{3}{2}\alpha^2(\beta + u)^2\right] \right\} \frac{W_{\text{ind}}(u)}{u} du, \quad (2.25)$$

где $\alpha = F_H/F_R$, $\beta = F/F_H$ — к распределению гауссова типа, а именно к распределению Рэля на участке $F \leq F_R$:

$$W_{RH}(F) dF = 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{F^2}{F_R^2}\right) \frac{F^2}{F_R^3} dF. \quad (2.26)$$

Таким образом, двухтемпературный анализ показывает, при каких условиях в термической плазме может реализоваться распределение гауссова типа. Для этого достаточно изменить порядок предельных переходов в функциях, описывающих ион-ионные корреляции и экранировку зарядов. В однотемпературной модели $T = T_e = T_i$ предельный переход $T \rightarrow \infty$, как было показано в [11] и как это следует из выражения (2.22), приводит к распределению Хольцмарка.

Следует, однако, учитывать, что для двухтемпературной модели случай $T_i > T_e$ соответствует эффективному затуханию ионно-звуковых колебаний. По этой причине для равновесной плазмы вряд ли можно ожидать реализации такого распределения.

Для изотропной турбулентности с высоким уровнем ионно-звуковых шумов распределения микрополей были проанализированы и рассчитаны в работах [18—22]. На рис. 2 приведен пример результирующего распределения микрополя для изотропного случая с $\alpha = E_H/E_R = 1$. Распределение $W(\beta)$ соответствует свертке функций Рэля W_R и Хольцмарка W_H (кривая 1), а также — рэлеевской функции с распределением ближайшего соседа W_B (кривая 2). Здесь же для сравнения приведены графики функций $W_H(\beta)$ и $W_B(\beta)$ (кривые 3 и 4 соответственно). В экспериментах с турбулентной плазмой обычно параметр $\alpha \ll 1$, поэтому соответствующая свертка практически совпадает с функцией Рэля всюду, за исключением далекого «крыла» $\beta \gg 1$. Таким образом, использование W_R в качестве исходного распределения полей в турбулентной плазме является не просто удобной и простой моделью, а действительно хорошим приближением к истинной картине явлений [80].

Для получения конкретных результатов необходимо сделать определенные предположения относительно аксиально-симметричной нормированной функции распределения статических электрических полей в плазме $W(F, \cos \theta)$. Используем в качестве модели суперпозицию одномерного спектра шумов с волновым вектором вдоль оси системы и двумерного спектра с волновыми векторами в перпендикулярной плоскости (подробнее см. § 4).

Как правило, для эксперимента представляет интерес случай,

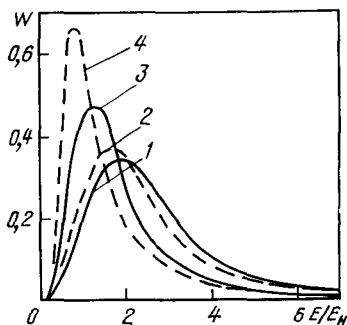


Рис. 2. Распределение микрополя в турбулентной плазме (распределение Хольцмарка — Рэля)

когда амплитуда поля $\langle F \rangle$ электростатических колебаний значительно больше средних полей $F_0 \approx 2,6eN^{2/3}$, создаваемых отдельными ионами. В этом случае вклад отдельных частиц в распределение статических полей можно считать пренебрежимо малым, а распределение суммарного поля $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$ записать в виде

$$W(\mathbf{F}, \cos \theta) dF d(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \langle F_{\parallel}^2 \rangle}} \frac{F^2}{\langle F_{\perp}^2 \rangle} \exp \left\{ -F^2 \left[\frac{1}{\langle F_{\perp}^2 \rangle} + \left(\frac{1}{2 \langle F_{\parallel}^2 \rangle} - \frac{1}{\langle F_{\perp}^2 \rangle} \right) \cos^2 \theta \right] \right\} dF d(\cos \theta). \quad (2.27)$$

Диаграмма направленности, соответствующая распределению, — эллипсоид вращения с осью z . При возрастании степени анизотропии $\eta = \sqrt{\frac{2 \langle E_{\parallel}^2 \rangle}{\langle E_{\perp}^2 \rangle}}$ от 0 до ∞ этот эллипсоид меняется по форме от сильно сплюснутой «чечевицы» до очень вытянутой «сосиски», принимая при $\eta = 1$ форму сферы.

Конкретный расчет анизотропного статического контура будет проведен в § 4.

§ 3. Механизмы уширения линий в плазме.

Характер взаимодействия атома с плазменным микрополем

Классификация механизмов, ответственных за уширение линий, может быть проведена либо по типам физических эффектов, вызывающих уширение, либо по характеру их воздействия на излучающий атом. В последнем случае обнаруживается общность различных механизмов уширения.

Важнейшими физическими эффектами, ответственными за уширение линий в плазме, являются эффекты Доплера, Штарка и Зеемана. Эффект Доплера вызывает смещение излучаемой атомом частоты на величину

$$\Delta \omega_D = \mathbf{k} \mathbf{v}, \quad |\mathbf{k}| = \omega_0/c, \quad (3.1)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор волны с частотой ω_0 , \mathbf{v} — скорость атома (c — скорость света).

Эффект Штарка вызывает сдвиг и расщепление атомных уровней во внешнем электрическом поле F на

$$\Delta \omega_{\text{Ш}} = C_k |F|^{k/2}, \quad (3.2)$$

где C_k называется постоянной штарк-эффекта; для водоподобных уровней ($k=2$):

$$C_2 = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) \hbar/me, \quad (3.3)$$

где n , n_1 , n_2 — главное и параболические квантовые числа атома.

Константа квадратичного штарк-эффекта C_4 не имеет универсальной структуры и для каждого атома вычисляется численно (см. [1]).

Эффект Зеемана вызывает расщепление атомных уровней в магнитном поле B на величину:

$$\Delta\omega_3 = M\mu_0 B, \quad -l \leq M \leq l, \quad (3.4)$$

где M — проекция орбитального момента атома l на направление B , $\mu_0 = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора (мы приводим простейший результат для бесспинового атома, см [1]).

Отметим для полноты так называемое электродинамическое уширение, обусловленное штарковским расщеплением уровней атома в электрическом лоренцевом поле $\mathbf{F} = [\mathbf{v}\mathbf{B}]/c$, возникающем в системе отсчета атома при его движении поперек магнитного поля.

Уширение, вызываемое тем или иным физическим эффектом, зависит от характера его воздействия на атом. В этой связи выделяют два основных механизма уширения: статический и ударный.

Разграничение этих двух механизмов уширения определяется следующим параметром. Пусть $\Delta\omega_i$ обозначает характерный сдвиг частоты атома, вызываемой одним из указанных физических эффектов (3.1) — (3.4). Пусть далее τ_c^i — время корреляции физических величин, вызывающих уширение; например, для доплеровского уширения $\tau_c^D \sim L/v$ — время свободного пробега атома (L — длина пробега); для штарковского уширения $\tau_c^W \sim T_F$ — время жизни поля F (в случае парных соударений равное просто времени пролета ρ/v уширяющей частицы) и т. д. Произведение этих двух параметров $\Delta\omega_i \tau_c^i$, называемое в радиофизике индексом модуляции [23], и определяет характер уширения.

Статический механизм уширения реализуется, если индекс модуляции велик:

$$\Delta\omega_i \tau_c^i \gg 1, \quad (3.5)$$

что отвечает, очевидно, глубоким и медленным сдвигам частоты.

Статический контур линии получается в предположении, что частотные сдвиги $\Delta\omega_i$ не зависят от времени (т. е. статичны). Тогда отдельный атом излучает бесконечно узкую линию

$$J = \delta(\Delta\omega - \Delta\omega_i) \quad (3.6)$$

($\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — сдвиг наблюдаемой частоты ω относительно невозмущенной ω_0).

Собственно статическое уширение возникает после усреднения (3.6) с функцией распределения сдвигов $W(\Delta\omega_i)$, что дает:

$$J(\omega) = \int W(\Delta\omega_i) \delta(\Delta\omega - \Delta\omega_i) d\Delta\omega_i = W(\Delta\omega). \quad (3.7)$$

Такое усреднение учитывает, что сдвиги частот у различных атомов различны, а наблюдается излучение не одного, а целого ан-

самбля атомов *. Причины различия сдвигов у атомов связаны для доплеровского уширения (3.1) — с различием скоростей атомов, для штарковского уширения (3.2) — с различием поля \mathbf{F} в разных точках пространства, для зеемановского уширения (3.4) — с пространственной неоднородностью магнитного поля.

Для максвелловского распределения атомов по скоростям статический доплеровский контур линии в соответствии с (3.7) имеет вид:

$$J_D(\omega) = \frac{1}{kv_0} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega}{kv_0}\right)^2\right],$$

$$v_0 = \sqrt{2T/M}, \quad (3.8)$$

где T, M — температура и масса атомов.

Для распределения электрических полей в плазме, определяемого функцией Хольцмарка $W_H(F)$ (см. § 2), статический штарковский контур линии имеет вид:

$$J_{\text{Ш}}(\omega) = \frac{1}{C_k F_0^{k/2}} \mathcal{H} \left[\left(\frac{\Delta\omega}{C_k F_0^{k/2}} \right)^{2/k} \right], \quad F_0 = 2,603eN^{2/3}, \quad (3.9)$$

где N — плотность уширяющих частиц; $\mathcal{H}(x)$ — функция Хольцмарка [6] (см. § 2).

Критерии применимости статического приближения получают подстановкой в (3.6) характерных средних значений $\Delta\omega_i$ и τ_c^i . Так, для доплеровского уширения, подставляя $\Delta\omega_i \sim \frac{v_0}{c} \omega_0$ и $\tau_c^i \sim \sim L/v_0$, получаем:

$$L \gg \lambda, \quad (3.10)$$

т. е. длина свободного пробега должна быть велика по сравнению с длиной световой волны.

Аналогично для штарковского уширения, полагая $\Delta\omega_i \sim \sim C_k (eN^{2/3})^{k/2}$ (расщепление в поле $eN^{2/3}$, создаваемое частицей на среднем межчастичном расстоянии) и $\tau_c^i \sim N^{-1/3}/v_0$, получаем для линейного (C_2) и квадратичного (C_4) штарк-эффекта:

$$N(C_2/v_0)^3 \equiv g_2 \gg 1 \text{ и } N(C_4/v_0) = g_4 \gg 1, \quad (3.11)$$

т. е. статическое приближение применимо при большой плотности и малой скорости частиц плазмы.

Рассмотрим теперь ударный механизм уширения, реализующийся при альтернативном (3.5) условии

$$\Delta\omega_i \tau_c^i \ll 1, \quad (3.12)$$

отвечающем, очевидно, малым и быстро меняющимся сдвигам частоты.

* Это обстоятельство послужило причиной более раннего названия этого типа уширения: «статистическое» [1]. В лазерной физике оно называется неоднородным ввиду неодинаковости сдвигов частоты у разных атомов [24].

Интуитивно очевидно, что слабое быстрофлуктуирующее возмущение должно приводить, как и при взаимодействии атома с нулевыми колебаниями электромагнитного поля, к форме контура линии лоренцева типа:

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_i}{\Delta\omega^2 + \gamma_i^2}, \quad (3.13)$$

где параметр γ_i , называемый ударной шириной линии*, зависит от конкретного механизма уширения. Ударный механизм уширения реализуется при условиях, обратных (3.10), (3.11).

Рассмотрим переход от статического механизма к ударному и структуру ударной ширины γ_i для конкретных примеров доплеровского и штарковского уширения линий. Рассмотрение проведем на основе классически-адиабатической модели уширения, в которой излучающий атом рассматривается как классический осциллятор, уширение спектра которого связано только с модуляцией его частоты вследствие доплеровского или штарковского сдвигов.

Контур линии $J(\omega)$ в этой модели имеет вид:

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dt \exp(-i\Delta\omega t) \Phi(t), \quad (3.14)$$

где $\Phi(t)$ — корреляционная функция амплитуд осциллятора [1, 73]:

$$\Phi(t) = \left\langle \exp \left[i \int_0^t \Delta\omega_i(\tau) d\tau \right] \right\rangle. \quad (3.15)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по случайным переменным, определяющим сдвиг фазы $\Delta\omega_i$.

Начнем со случая доплеровского уширения. Для изменения скорости атома примем, следуя [25], модель броуновского движения. Тогда, разлагая экспоненту в (3.15) в ряд и проводя усреднение почленно, можно убедиться, что $\Phi(t)$ выражаются через средний квадрат смещения $\langle r^2(t) \rangle$ броуновской частицы (нечетные члены разложения обращаются в нуль при усреднении), что дает

$$\Phi(t) = \exp[-k^2 \langle r^2(t) \rangle]; \quad \langle r^2(t) \rangle = \frac{v_0^2}{\nu^2} [1 - e^{-\nu t} - \nu t], \quad (3.16)$$

где ν — частота столкновений в модели броуновского движения, определяющая длину свободного пробега $L = v_0/\nu$.

При малых ν (точнее, при $\frac{kv_0}{\nu} = \frac{L}{\lambda} \gg 1$) основной вклад в (3.14) вносит область малых $t(\nu t \ll 1)$. Разлагая (3.16) при $\nu t \ll$

* В лазерной физике уширение типа (3.13) называется «однородным» ввиду того, что ширина γ_i одинакова для всех атомов.

$\ll 1$ и подставляя результат в (3.14), приходим к доплеровскому контуру (3.8).

При больших $v(L/\lambda \ll 1)$ основной вклад в (3.14) вносит область $vt \gg 1$, где смещение $\langle r^2(t) \rangle \approx v_0^2 t / v$ носит диффузионный характер с коэффициентом диффузии $D = v_0^2 / v = v_0 L$. Подстановка этого значения $\langle r^2(t) \rangle$ в (3.14) приводит к лоренцеву профилю линии (3.13), где ударная ширина γ_i равна:

$$\gamma_i \equiv \gamma_d = (kv_0)^2 / v \equiv k^2 D. \quad (3.17)$$

Ширина γ_d оказывается в $kv_0/v \ll 1$ раз меньше доплеровской ширины, т. е. столкновения приводят к эффективному сужению линии. Этот эффект был открыт Дике [1] (см. также [24]). Укажем, что, например, для кулоновских столкновений излучающего иона с зарядом $Z=10$ с ионами плазмы, обладающими средним зарядом $\bar{Z} \sim 10$, при температуре $T \sim 1$ кэВ для линий с $\lambda \sim 100$ Å эффект сужения должен наблюдаться уже при плотности ионов плазмы $N_Z \sim 10^{20}$ см $^{-3}$ [26].

Рассмотрим теперь штарковское уширение. Примем, что суммарный штарковский сдвиг частоты атома $\Delta\omega_{\text{Ш}}$ складывается из сдвигов $\Delta\omega_{\text{Ш}k}$, вызываемых отдельными уширяющими частицами (модель скалярного сложения возмущений [27]):

$$\Delta\omega_{\text{Ш}} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \Delta\omega_{\text{Ш}k}, \quad \Delta\omega_{\text{Ш}k} = \frac{C_{2i}}{R_k^{2i}} \quad (i = 1, 2), \quad (3.18)$$

где траектория уширяющей частицы $R_k^2 = \rho_k^2 + v^2 t^2$ считается прямолинейной (с прицельным параметром ρ_k), \mathcal{N} — полное число частиц в объеме V ($N = \mathcal{N}/V$ — плотность частиц).

В такой модели корреляционная функция (3.15) распадается на произведение одночастичных функций, так что [27]:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \left\langle \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \exp \left[i \int_0^t \Delta\omega_{\text{Ш}i}(\tau) d\tau \right] \right\rangle_{\mathcal{N}} = \\ &= \left\langle 1 - \frac{1}{V} \int dr \left\{ 1 - \exp \left[i \int_0^t \Delta\omega_{\text{Ш}} d\tau \right] \right\} \right\rangle_1^{\mathcal{N}=NV} = \\ &= \exp[-NV(t)]; \\ V(t) &= 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^\infty dZ \left\{ 1 - \exp \left[i \int_z^{z+vt} \Delta\omega_{\text{Ш}}(u) du \right] \right\}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Здесь символ $\langle \dots \rangle_{\mathcal{N}}$ обозначает усреднение по ансамблю $\mathcal{N} = NV$ частиц с плотностью N в объеме V , а $\langle \dots \rangle_1$ — усреднение по фазовому объему одной частицы; при выводе (3.19) мы перешли к пределу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N = \mathcal{N}/V = \text{const}$ и ввели цилиндрические координаты $dr = 2\pi\rho d\rho dZ$ с осью $OZ \parallel v$ (здесь и ни-

же скорость v будем считать, для простоты, фиксированной и равной некоторой характерной скорости максвелловского распределения). Величина $V(t)$ называется «столкновительным» объемом.

Введем теперь характерные параметры теории уширения. Как видно из (3.19), эффективность столкновения характеризуется изменением фазы $\Delta\varphi$ атомного осциллятора. Фаза $\Delta\varphi$, приобретаемая при одном столкновении, равна

$$\Delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\omega_{шт}(t) dt = C_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\rho^2 + v^2)^{n/2}} = \pi \frac{C_n}{\rho^{n-1}v}. \quad (3.20)$$

Если $\Delta\varphi \sim \pi$, то фаза осциллятора полностью сбивается, и атом после такого столкновения «забывает» начальное значение фазы. Значение прицельного параметра ρ_B , при котором $\Delta\varphi \sim \pi$ называется радиусом Вайскопфа:

$$\rho_B = (C_n/v)^{1/(n-1)}. \quad (3.21)$$

Этот радиус определяет эффективное сечение сбоя фазы $\sigma_B \sim \sim \pi\rho_B^2$, называемое сечением оптического столкновения. Важную роль играет вайскопфовская частота (или обратное время) столкновения:

$$\Omega_B = v/\rho_B = v^{n-1}/C_n^{1/(n-1)}. \quad (3.22)$$

Радиус Вайскопфа определяет также эффективный объем взаимодействия порядка ρ_B^3 , внутри которого в среднем находится

$$N\rho_B^3 \equiv g \quad (3.23)$$

частиц. Таким образом, если $g \gg 1$, то с атомом взаимодействует одновременно большое количество частиц, а если $g \ll 1$ — то одна (ближайшая) частица. Следовательно, параметр g^{-1} является параметром парности (бинарности) уширяющих столкновений.

Характерное время между столкновениями определяется частотой (или обратным временем свободного пробега):

$$\gamma \sim Nv\sigma_B. \quad (3.24)$$

Рассмотрим теперь характер эволюции корреляционной функции (3.19) [12, 28]. Легко видеть, что единственным масштабом изменения $V(t)$ является Ω_B^{-1} . Поэтому имеются две характерные области времен: $\Omega_B\tau \ll 1$ и $\Omega_B\tau \gg 1$. При $\Omega_B\tau \ll 1$ из (3.19) получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V(\tau) &= \int_0^{\infty} 4\pi r_0^2 dr_0 [1 - \cos(C_n\tau/r_0^n)] = \\ &= \frac{4\pi}{3} (C_n\tau)^{3/n} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right) \sin\left(\frac{n-3}{n}\right) \frac{\pi}{2}; \quad \Omega_B\tau \ll 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь временная эволюция столкновительного объема целиком определяется видом статического потенциала взаимодействия $C_n R^{-n}$. Поэтому эту область, отвечающую малым скоростям (или малым временем τ), принято называть статической.

При больших временах $\Omega_B \tau \gg 1$ имеем

$$\operatorname{Re} V(\tau) = \operatorname{Re} V'(\infty) \tau = v \sigma_{BT}; \quad \Omega_B \tau \gg 1, \quad (3.26)$$

где $V'(\infty)$ — производная столкновительного объема, равная:

$$\operatorname{Re} V'(\infty) = v 2\pi \int_0^{\rho_m} \rho d\rho \left[1 - \cos \left(\frac{C_n}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\rho^2 + u^2)^{n/2}} \right) \right]. \quad (3.27)$$

Из (3.26) видно, что в области $\Omega_B \tau \gg 1$ эволюция $V(\tau)$ связана с сечением изолированных столкновений. Эту область принято называть ударной.

Таким образом, столкновительный объем $V(\tau)$ является монотонно растущей функцией τ с масштабом Ω_B^{-1} и двумя характерными асимптотиками: статической (3.25) и ударной (3.26).

Из приведенного рассмотрения следует, что задача об уширении линии связана с двумя основными проблемами. Первая состоит в исследовании статистики флуктуирующего плазменного микрополя, вторая — динамики его воздействия на атом. Вопросы статистических распределений рассмотрены в § 2. Ниже мы остановимся на основных проблемах взаимодействия атома с плазменным микрополем.

Выше при исследовании процессов уширения использовалась адиабатическая модель, в которой учитывается только изменение энергии атомных состояний (фазовая модуляция). Эта модель справедлива для достаточно медленных возмущений, не вызывающих переходов между различными уровнями атома. В частности, она применима для уширения линий неводородоподобных атомов ионами плазмы вследствие квадратичного штарк-эффекта.

Рассмотрим динамику взаимодействия атома с возмущающим электрическим полем $\mathbf{F}(t)$ на следующем простейшем примере. Пусть верхний (излучающий) уровень атома α возмущается только вследствие его взаимодействия с одним близлежащим подуровнем α' , а поле $\mathbf{F}(t)$ создается одной пролетающей заряженной частицей плазмы. Мы интересуемся контуром линии, возникающей при переходе с уровня α на более низкий уровень β , возмущением которого пренебрегается. Ширина излучаемой линии (а также величина возмущения) считается малой по сравнению с разностью энергий $\Delta E_{\alpha\alpha'} = E_\alpha - E_{\alpha'} = \hbar \omega_{\alpha\alpha'}$ уровней α , α' (так называемый случай изолированных линий, реализующийся, например, для низших уровней гелия).

Гамильтониан \hat{H} рассматриваемой системы имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) = \hat{H}_0 + e \mathbf{r}_A \mathbf{F}(t) = \hat{H}_0 + \frac{e^2 \mathbf{r}_A \mathbf{r}(t)}{r^3(t)}, \quad (3.28)$$

но \hat{H}_0 — невозмущенный гамильтониан атома (имеющий уровни α , α' и β), $e\mathbf{r}_A$ — дипольный момент атома, $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t$ — координата возмущающей частицы.

Изменение состояния атома во времени удобно описывать с помощью оператора эволюции $\hat{T}(t, t_0)$, удовлетворяющего уравнению Шредингера (в представлении взаимодействия):

$$i\hbar \frac{d\hat{T}(t, t_0)}{dt} = \exp(iH_0 t/\hbar) V(t) \exp(-iH_0 t/\hbar) \hat{T}(t, t_0). \quad (3.29)$$

С помощью оператора T волновая функция $\Psi(t)$ атома записывается в виде

$$\Psi_\alpha(t) = \sum_{\alpha'} T_{\alpha\alpha'}(t, t_0) \exp(-iE_{\alpha'} t/\hbar) \Psi_{\alpha'}; \\ T_{\alpha\alpha'}(t_0, t_0) = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3.30)$$

где Ψ_α — невозмущенная функция, отвечающая гамильтониану \hat{H}_0 .

Характер эволюции атома зависит от соотношения частоты изменения возмущения $\nu/\rho_{\text{эф}}$ (обратное время пролета частицы на эффективном расстоянии $\rho_{\text{эф}}$) и частоты $\omega_{\alpha\alpha'}$, разделяющей излучающий и возмущающий уровни. Если

$$\rho_{\text{эф}} \omega_{\alpha\alpha'} / \nu \gg 1, \quad (3.31)$$

то возмущение адиабатично, т. е. не вызывает неупругих переходов между состояниями α и α' . В этом случае оператор эволюции T диагонален:

$$T_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} \exp \left[-i/\hbar \int_{t_0}^t \frac{C_4}{r^4(\tau)} d\tau \right], \quad (3.32)$$

где постоянная квадратичного штарк-эффекта

$$C_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \frac{|r_{A\alpha\alpha'}|^2}{\omega_{\alpha\alpha'} a_0^2} \left(a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \right). \quad (3.33)$$

Использование «адиабатического» оператора эволюции (3.32) эквивалентно, очевидно, адиабатической модели осциллятора (3.19). Критерий применимости этой модели получается из (3.31) после подстановки в качестве $\rho_{\text{эф}}$ радиуса Вайскопфа $\rho_B \sim \sim (C_4/\nu)^{1/4}$, что дает

$$\frac{\hbar \omega_{\alpha\alpha'}}{m\nu^2} \frac{|r_{\alpha\alpha'}|}{a_0} \gg 1. \quad (3.34)$$

Подчеркнем, что в адиабатической модели частота возмущения ν/ρ_B считается малой только по сравнению с расстоянием между уровнями $\omega_{\alpha\alpha'}$, но не по сравнению с расстройкой частоты $|\Delta\omega| \ll \ll \omega_{\alpha\alpha'}$. По отношению к этой последней частота ν/ρ_B может быть как малой (статический предел), так и большой (ударный предел); см. выше.

При условии, противоположном (3.34), возмущение вызывает неупругие (неадиабатические) переходы между уровнями α , α' , которые и являются основной причиной уширения в этом случае. При этом вся область частот $|\Delta\omega| < \omega_{\alpha\alpha'}$ попадает в область ударного уширения.

Для ударного механизма уширения расчеты оператора эволюции T основываются (как в адиабатическом, так и в неадиабатическом случаях) на общих принципах ударной теории. Их суть сводится к тому, что столкновения считаются очень быстрыми, так что характерные времена, на которых заметно изменяется оператор эволюции, оказываются гораздо больше времен столкновения. Это позволяет рассматривать вместо точных уравнений (3.29) для оператора T уравнения, усредненные по параметрам столкновения. Действительно, выберем отрезок времени Δt так, чтобы он был велик по сравнению с временем столкновения $\rho_{\alpha\alpha'}/v$, но все еще мал по сравнению с характерным временем изменения оператора T . Тогда для среднего приращения ΔT оператора T на отрезке времени от t до $t+\Delta t$ имеем:

$$\Delta\{T\} = \{T(t + \Delta t, 0) - T(t, 0)\} = \{[T(t + \Delta t, t) - 1] T(t, 0)\}, \quad (3.35)$$

где скобки $\{ \dots \}$ обозначают усреднение по ансамблю уширяющих частиц.

В силу выбора Δt оба сомножителя в правой части (3.35) статистически независимы, так что их можно разбить на произведение средних. Далее, оператор эволюции $T(t+\Delta t, t)$ за время Δt можно заменить, в силу мгновенности, оператором $T(-\infty, +\infty)$, совпадающим, очевидно, с матрицей рассеяния (S -матрицей). Наконец, результат усреднения в силу независимости отдельных столкновений сводится просто к умножению на число столкновений за время Δt , равное $N \int v f(v) dv 2\pi\rho d\rho \Delta t$.

Переходя в (3.35) к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и решая возникающее дифференциальное уравнение, получаем выражение для оператора эволюции в ударном приближении:

$$\{T(t)\} = \exp(+i\hat{H}_0 t/\hbar) \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar + \hat{\Phi}t), \quad (3.36)$$

где не зависящий от времени оператор $\hat{\Phi}$ называется оператором ударного уширения и связан очевидным образом с матрицей рассеяния \hat{S} :

$$\hat{\Phi} = N \int_0^\infty v f(v) dv \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho [\hat{S}(\rho, v) - 1]. \quad (3.37)$$

Таким образом, в ударном приближении расчет оператора эволюции $T(t)$ сводится к существенно более простому расчету оператора Φ .

Тем не менее задача определения \hat{S} -матрицы в (3.37) остается серьезной проблемой. Ее решение очевидно в адиабатическом пределе (3.32), где \hat{S} -матрица сводится просто к множителю $e^{i\eta(\infty)}$,

где $\eta(\rho, v)$ — сдвиг фазы атомного осциллятора при одном столкновении (см. выше модель осциллятора).

Для быстрых, неадиабатических столкновений расчет \widehat{S} -матрицы возможен по теории возмущений. Ее использование оправдано в силу специфики дальнедействующего кулоновского возмущения, действующего на атом, при котором основной вклад в уширение вносят далекие (слабые) столкновения.

Ограничиваясь при решении уравнения (3.29) теорией возмущений второго порядка и подставляя возмущение в виде (3.28), получаем

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \widehat{S} - 1 | \alpha \rangle = & - \left\{ \frac{e^2}{\hbar^2} \sum_{\sigma, \nu} \langle \alpha | r_{A\sigma} | \alpha' \rangle \langle \alpha' | r_{A\nu} | \alpha \rangle \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \exp [i(\omega_{\alpha\alpha'} t_1 + \omega_{\alpha'\alpha} t_2)] F_{\sigma}(t_1) F_{\nu}(t_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Используя явный вид $\mathbf{F} = e\mathbf{r} \cdot r^{-3}$ ($r_{\sigma}(t) = \rho_{\sigma} + v_{\sigma} t$), выполняя в (3.38) усреднение по угловым переменным и выражая интегралы по t_1 и t_2 в (3.38) через функции Бесселя $K_0(Z)$ и $K_1(Z)$, получаем [29]:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \widehat{S} - 1 | \alpha \rangle = & \\ = - \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar \rho v} \right) & |\langle \alpha | \mathbf{r} | \alpha' \rangle|^2 \left[A \left(\frac{\rho \omega_{\alpha\alpha'}}{v} \right) + iB \left(\frac{\rho \omega_{\alpha\alpha'}}{v} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$A(Z) = Z^2 [K_0^2(|Z|) + K_1^2(|Z|)]; \quad (3.40)$$

$$B(Z) = \frac{2Z}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{A(Z')}{Z^2 - Z'^2} dZ'. \quad (3.41)$$

Функции A и B в (3.39) определяют соответственно неупругую и упругую части фазы рассеяния $\delta = \Gamma + i\eta$ (в чем легко убедиться, представляя S в виде $S = e^{\delta}$). На рис. 3 представлены графики функций A и B вместе с их асимптотическими значениями, откуда ясно соотношение между ролью упругих и неупругих процессов в уширении. Действительно, в адиабатической области $Z_{\text{эф}} = \frac{\rho_{\text{эф}} \omega_{\alpha\alpha'}}{v} \gg 1$ основной вклад в уширение вносит упругое рассеяние [функция $B(Z) \approx \pi/4Z$, причем набег фазы $\text{Re}i\delta = \eta(\rho, v)$ здесь совпадает с результатом классически-адиабатической моде-

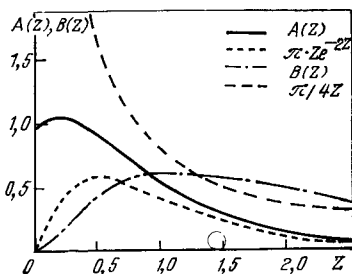


Рис. 3. Функции $A(Z)$ и $B(Z)$, определяющие вклад неупругих и упругих процессов в уширение

ли. Напротив, при $Z_{эф} = \frac{\rho_{эф}\omega_{\alpha\alpha'}}{v} \ll 1$ основную роль играют неупругие процессы (функция $A \approx 1$).

В неадиабатической области $\frac{\rho_{эф}\omega_{\alpha\alpha'}}{v} \ll 1$ выражение для диагональных элементов оператора $\Phi_{\alpha\alpha'}$ получается подстановкой (3.39) (при $A \approx 1, B \simeq 0$) в (3.37) и интегрированием:

$$\text{Re } \Phi_{\alpha\alpha} = -\frac{4\pi}{3} N \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \frac{|\mathbf{r}_{\alpha\alpha'}|^2}{a_0^2} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \ln \frac{v}{\rho_{\text{мин}}\omega_{\alpha\alpha'}}, \quad (3.42)$$

где мы ввели нижний ($\rho_{\text{мин}}$) параметры обрезания в логарифмически расходящихся интегралах по ρ . Величина $\rho_{\text{мин}}$ выбирается из условия применимости теории возмущений:

$$|\langle \alpha | S(\rho_{\text{мин}}) - 1 | \alpha \rangle| \sim \left(\frac{\hbar}{mv\rho_{\text{мин}}} \right)^2 \frac{|\mathbf{r}_{\alpha\alpha'}|^2}{a_0^2} \approx 1. \quad (3.43)$$

Из (3.42) видно, что вклад «слабых» столкновений $\rho > \rho_{\text{мин}}$ логарифмически велик по сравнению с вкладом «сильных» столкновений, что и оправдывает использование теории возмущений.

Изложенное практически исчерпывает проблемы бинарной теории уширения частицами для случая изолированных линий. Перейдем к случаю перекрывающихся линий: $\omega_{\alpha\alpha'} \rightarrow 0$. Здесь мы ограничимся исключительно случаем водородоподобных уровней, отвечающих полностью перекрытию линий ($\omega_{\alpha\alpha'} \rightarrow 0$).

Специфика уширения водородных линий связана, в первую очередь, с отсутствием параметра $\omega_{\alpha\alpha'}$, разграничивающего адиабатические и неадиабатические столкновения, а следовательно, с переопределением самого понятия «адиабатичности». Действительно, при воздействии постоянного электрического поля «правильными» (т. е. диагонализующими возмущениями) волновыми функциями атома водорода становятся не сферические (как выше), а параболические волновые функции. Если частота изменения возмущения достаточно мала по сравнению с частотой штарковского расщепления уровней $C_2F/e \sim C_2\rho^{-2}$, то переходы между штарковскими состояниями отсутствуют — атом адиабатически «следит» за полем. Критерий адиабатичности следует из (3.39), если вместо $\omega_{\alpha\alpha'}$ подставить величину $C_2\rho^{-2}$, что дает:

$$C_2/\rho v \gg 1, \quad (3.44)$$

т. е. близкие и медленные пролеты являются адиабатическими, тогда как далекие (слабые) и быстрые — неадиабатическими.

Для более подробного рассмотрения этого вопроса преобразуем волновую функцию атома $\Psi(t)$ из лабораторной системы координат $X'Y'Z'$ в систему $X'Y'Z$, ось OZ' которой в каждый момент времени направлена вдоль поля $\mathbf{F}(t)$:

$$\Psi(t) = \exp[iL_{X\Phi}(t)] \Psi'(t). \quad (3.45)$$

Здесь ψ' — волновая функция атома во вращающейся системе, $\exp[iL_X\phi(t)]$ — оператор поворота на угол $\phi(t)$, разделяющий системы XYZ и $X'Y'Z'$ (L_X — X -компонента орбитального момента атома).

Подставляя (3.45) в уравнение Шредингера, получаем:

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = [\hat{H}_0 + d_z F(t) + \hbar L_X \dot{\phi}(t)] \psi' \equiv [\hat{H}_0 + \hat{V}] \psi'. \quad (3.46)$$

Таким образом, во вращающейся системе координат у атома наряду со взаимодействием с электрическим полем $d_z F(t)$ появляется «магнитное» взаимодействие $L_X \dot{\phi}$, связанное с мгновенной угловой скоростью поворота $\dot{\phi}$. Последнее название оправдано ввиду полной аналогии взаимодействия $L_X \dot{\phi}$ и взаимодействия атома с внешним магнитным полем $L_X \mu_0 B$.

Магнитное возмущение, обусловленное вращением, вызывает неадиабатические переходы между штарковскими состояниями. Если изменение поля медленное, то влияние эффектов вращения может быть учтено по теории возмущений, причем параметром является величина (3.44).

Для случая парных столкновений имеется интересная возможность найти точную эволюцию волновой функции водородного уровня с фиксированным главным квантовым числом n в поле пролетающей заряженной частицы. Она связана с тем, что как электрическое $d_z F$, так и магнитное $L_X \dot{\phi}$ возмущения имеют одинаковую зависимость от времени, так что их отношение остается постоянным в процессе столкновения. Действительно, величину $\dot{\phi}$ легко найти из условия сохранения углового момента ушибряющей частицы:

$$Mr^2(t) \dot{\phi}(t) = Mv\rho, \quad \dot{\phi}(t) = v\rho/r^2(t), \quad (3.47)$$

откуда и виден одинаковый закон зависимости $F(t)$ и $\dot{\phi}(t)$ от $r(t)$.

Таким образом, при столкновении с частицей атом водорода находится во взаимно перпендикулярных электрическом и эффективном (пропорциональном $\dot{\phi}$) магнитном полях, меняющихся синхронно во времени, так что угол β , составляемый их векторной суммой или разностью с осью OX , остается постоянным. Введем векторы

$$\omega_{1,2}(t) = \dot{\phi}(t) \mp \frac{B}{e} \mathbf{F}(t) \quad \left(B = \frac{3}{2} n \frac{\hbar}{m} \right), \quad (3.48)$$

направления которых в процессе столкновения остаются неизменными. Так, для угла β_2 наклона ω_2 к оси $OX \parallel \mathbf{F}$ с учетом (3.47) имеем

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \rho v / B. \quad (3.49)$$

Эволюция атома будет определена, если удастся построить такие состояния, которые отвечают квантованию атома вдоль направлений $\omega_{1,2}$. Для построения таких состояний воспользуемся свойствами симметрии кулоновского поля, проявляющейся в наличии дополнительного интеграла движения — вектора Рунге — Ленца [30, 31]:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m} ([\mathbf{pL}] - [\mathbf{Lp}]) - e^2\mathbf{r}/r \quad (3.50)$$

(\mathbf{p} — импульс электрона). Матричные элементы оператора \mathbf{A} для состояний с фиксированным n совпадают с матричными элементами дипольного момента атома: $\mathbf{d} = -\frac{3}{2} \frac{ea_0}{\hbar} \mathbf{A}$.

Вводя новые «операторы момента»

$$\mathbf{J}_{1,2} = (\mathbf{L} \pm \mathbf{A})/2, \quad (3.51)$$

перепишем потенциал возмущения $V(t)$ в (3.46) в виде

$$V(t) = \hbar [\mathbf{J}_1 \omega_1(t) + \mathbf{J}_2 \omega_2(t)]. \quad (3.52)$$

Из (3.52) видно, что интересующие нас состояния атома [диагонализующие возмущение $V(t)$] отвечают определенной проекции \mathbf{J}_1 на ω_1 (обозначаемой ниже квантовым числом n') и \mathbf{J}_2 на ω_2 (обозначаемой n''). Возможность выбора независимо квантуемых величин \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 связана с наличием двух независимых интегралов движения в кулоновском поле (L и A) и основана на том, что операторы \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 подчиняются обычным правилам коммутации для момента, причем между собой проекции \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 полностью коммутируют.

Функции $u_{n'n''}$, диагонализующие возмущение (3.52), могут быть получены из обычных параболических функций $u_{i_1 i_2}$ (i_1, i_2 — квантовые числа проекций векторов $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ на ось $OX||F$) простым вращением на постоянные углы β_1, β_2 , так что [31, 32]

$$u_{n'n''} = \sum_{i_1, i_2} D_{n' i_1}^{(j)}(\beta_1) D_{n'' i_2}^{(j)}(\beta_2) u_{i_1 i_2}, \quad (3.53)$$

где $D_{kl}^{(j)}$ — функции поворота Вигнера [33]; величина $j = (n-1)/2$, а квантовые числа проекций n', n'', i_1, i_2 меняются, как обычно, от $-j$ до $+j$.

Выбирая волновые функции $u_{n'n''}$, для изменения энергии атома $\Delta E(t)$ во вращающейся системе координат из (3.52) получаем:

$$\Delta E(t) = (n' + n'') \hbar |\omega_{1,2}(t)| = \hbar (n' + n'') \sigma \frac{\rho v}{e} F(t); \quad \sigma = \sqrt{1 + (B/\rho v)^2}. \quad (3.54)$$

Таким образом, волновая функция $\Psi'(t)$ во вращающейся системе имеет вид [34, 12]

$$\Psi'(t) = u_{n'n''} \exp \left[-i (n' + n'') \sigma \frac{\rho v}{e} \int_0^t F(\tau) d\tau \right]. \quad (3.55)$$

Из (3.55) следует, что эволюция волновой функции связана (как и в адиабатической модели осциллятора I) только с модулем электрического поля $F(t)$. Тем самым задача оказывается аналогичной адиабатической теории со своеобразно определенными «компонентами» $u_{n'n''}$. Эффекты неадиабатичности сводятся к зависимости амплитуд этих компонент от параметров пролета, а также к некоторому усложнению фазового множителя. Отмеченное обстоятельство позволяет перенести многие результаты адиабатической модели на общий случай. При этом заранее ясно, что общая теория (3.55) содержит такое же число параметров, как и адиабатическая модель, так что речь может идти лишь о численных различиях, которые к тому же в ряде случаев невелики.

Окончательные результаты можно представить также в более общей форме, введя оператор эволюции $\widehat{T}(t)$ водородного уровня [32]:

$$\langle i_1' i_2' | \widehat{T}(t) | i_1 i_2 \rangle = \sum_{n', n''=-j}^{+j} D_{i_1' n'}^{(j)}(\beta) D_{i_2' n''}^{(j)}(\pi - \beta) D_{i_1 n'}^{(j)}(\beta) D_{i_2 n''}^{(j)}(\pi - \beta) \times \\ \times \exp \left[-i(n' + n'') \hbar \sigma \frac{\rho v}{e} \int_0^t F(\tau) d\tau \right], \quad (3.56)$$

где $D_{ik}^{(j)}$ — операторы поворота.

Все перечисленные результаты легко переносятся на случай уширения линий водородоподобных ионов, для которого существен учет искривления траектории уширяющей частицы [35]. Действительно, в силу сохранения момента частицы в кулоновском поле для угловой скорости $\dot{\varphi}$ имеем прежнее выражение (3.47), а для угла поворота $\varphi(t)$ поля \mathbf{F} время t (определяющего фазу волновой функции) — выражение

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \rho v_\infty \int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)}, \quad (3.57)$$

где φ_0 — начальный угол; v_∞ — скорость электрона на бесконечности.

В отличие от прямолинейного движения величина $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ ограничена значением $\varphi(\infty) = \arccos \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon = (1 + M^2 \rho^2 v_\infty^4 / (Z-1)^2 e^4)^{1/2}$ — эксцентриситет гиперболы (Z — заряд излучающего иона). Степень отклонения от прямолинейности определяется, очевидно, отношением радиуса ρ к радиусу Ландау $\rho_\Delta = Ze^2 / Mv_\infty^2$.

Из сказанного ясно, что для расчета эволюции волновой функции водородного атома нет необходимости прибегать к приближениям ударной или статической теорий. Соответствующие предельные результаты автоматически следуют из общего решения после соответствующих усреднений по параметрам столкновения. Так, при малых скоростях ($v \rightarrow 0$) состояния атома $u_{n'n''}$ переходят в параболические состояния с осью OX вдоль поля $\mathbf{F}(t)$, а изменения энергии (3.54) — в штарковские сдвиги частоты. Тем самым прослеживается переход к статической адиабатической модели.

Результаты ударной теории для водорода должны получаться из общих формул (3.42) при устремлении $\omega_{\alpha\alpha'} \rightarrow 0$. Из (3.42) вид-

но, однако, что ударная ширина линии $\text{Re}\Phi_{\alpha\alpha}$ логарифмически расходится на верхнем пределе $\rho_{\text{макс}} \sim v/\omega_{\alpha\alpha'} \rightarrow \infty$.

Это обстоятельство носит принципиальный характер и связано с тем, что ударная теория, основанная на замене оператора эволюции \hat{S} -матрицей, строго говоря, неприменима к кулоновскому взаимодействию. Действительно, если вычислять оператор эволюции $\hat{T}(t)$ при конечных временных t во втором порядке теории возмущений, то он, очевидно, оказывается связанным с интегралом от парной корреляционной функции электрических полей [36, 37]:

$$\langle \hat{T}_{\alpha\alpha}(t) \rangle \propto \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle F(t') F(t'') \rangle \propto t \ln \frac{vt}{\rho_{\text{мин}}}. \quad (3.58)$$

Последний результат показывает, что производная $d\hat{T}/dt$ не выражается в действительности через постоянный оператор Φ , а содержит логарифмический искажающий множитель. Этот множитель указывает на то, что при кулоновском взаимодействии далекие пролеты с $\rho \sim vt$ нельзя считать законченными [36, 37]. В действительности в плазме величины $\rho_{\text{макс}}$ ограничены значением ρ_D , так что при $t_{\text{эф}} \geq \rho_D/v \sim \omega^{-1}_{pe}$ логарифм следует обрезать на $\rho_{\text{макс}} \sim \rho_D$, что, очевидно, восстанавливает применимость ударной теории. В теории уширения, однако, эффективные времена $t_{\text{эф}}$ могут определяться величинами порядка $\Delta\omega^{-1}$, меньшими ω^{-1}_{pe} , что должно привести к логарифмическим искажениям лоренцева (ударного) контура линии [37].

§ 4. Статическая теория и ее обобщения

Исходное допущение статической теории состоит в том, что сдвиг линии (точнее, любой ее компоненты $\alpha \rightarrow \beta$) является функцией некоторого физического параметра γ (скорости излучающего атома, напряженности внешнего магнитного поля, электрического микрополя и т. д.), распределение которого $W(\gamma)$ считается известным. В этой схеме каждый атом «видит» свое значение параметра γ , и спектр излучения отдельной компоненты атомной линии имеет вид:

$$I_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\omega) = I_{\alpha\beta} \delta[\Delta\omega - f(\gamma)]. \quad (4.1)$$

Наблюдаемая интенсивность получается суммированием интенсивностей от отдельных атомов или, что эквивалентно, усреднением (4.1) по распределению $W(\gamma)$. Соответствующее интегрирование дает, очевидно, следующий результат для статического распределения интенсивности в компоненте $\alpha \rightarrow \beta$:

$$I_{\alpha\beta}(\omega) = I_{\alpha\beta} W[f^{-1}(\Delta\omega)] \frac{df^{-1}(\Delta\omega)}{d\Delta\omega}, \quad (4.2)$$

где f^{-1} — функция, обратная f .

Если, например, роль γ играет компонента v_i скорости атома, то $f(\gamma) = \omega_0 v_i / c$, и в случае максвелловского распределения $W(v_i)$ (4.2) дает известный доплеровский контур линии. Для важного случая линейного штарк-эффекта в ионном микрополе \mathbf{F} имеем $\gamma = |\mathbf{F}| = F$, $f(\gamma) = C_{\alpha\beta} F$ ($C_{\alpha\beta}$ — штарковская постоянная рассматриваемой компоненты), $W(\gamma)$ — хольцмарковское распределение микрополя (2.4) или его обобщение, представленное на рис. 1, так что

$$I_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{I_{\alpha\beta}}{C_{\alpha\beta}} W\left(\frac{\Delta\omega}{C_{\alpha\beta}}\right). \quad (4.3)$$

Для получения статического контура $I_{ab}(\omega)$ линии в целом надо подставить в (4.3) вышеуказанное распределение $W(F)$, просуммировать по всем штарковским компонентам α и β верхнего и нижнего уровней и для нормировки, разделить на полную интенсивность линии $I_0 = \sum_{\alpha, \beta} I_{\alpha\beta}$. В пределе идеальной плазмы ($\mathcal{N}_D = \infty$) это дает [см. (2.4)]:

$$I_{ab}(\omega) = \frac{1}{I_0} \sum_{\alpha, \beta} \frac{I_{\alpha\beta}}{C_{\alpha\beta} F_0} \mathcal{H}\left(\frac{\Delta\omega}{C_{\alpha\beta} F_0}\right). \quad (4.4)$$

Расчеты контуров по этой формуле для ряда водородных линий выполнены в [38].

Подчеркнем, что хольцмарковский контур линии существенно небинарен (в этом состоит важное достоинство статического приближения вообще). Переход к бинарному случаю происходит согласно (2.7) лишь в крыле линии — при больших значениях $\Delta\omega$:

$$I_{ab} \sim \frac{2\pi N}{\Delta\omega^{5/2}} \frac{1}{I_0} \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta}^{3/2} I_{\alpha\beta} \equiv \frac{2\pi N C^{3/2}}{\Delta\omega^{5/2}}, \quad (4.5)$$

где введена эффективная штарковская постоянная C для линии в целом. Ее приближенная оценка дается формулой [12, 39]:

$$C = \left(\frac{3}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar}{m} (n_a^2 - n_b^2), \quad (4.6)$$

где n_a, n_b — главные квантовые числа уровней a и b .

Выражение (4.5) уже линейно по плотности N уширяющих частиц. Переход к этому бинарному результату происходит при

$$\Delta\omega \gg (C/e) F_0 = \lambda C N^{2/3} \equiv \Delta\omega_0. \quad (4.7)$$

Величина $\Delta\omega_0$ определяет характерный масштаб хольцмарковского уширения водородной линии. Контур линии (4.4) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} I_{ab}(\omega) d\omega = 1, \quad (4.8)$$

следующему из нормированности функции Хольцмарка.

Напомним, что среди линий водорода есть обладающие центральной штарковской компонентой (например, L_{α} , H_{α} , H_{γ}) и не обладающие таковой (H_{β} , H_{δ}); статическое уширение, по самому его смыслу, относится только к нецентральному (боковым) штарковским компонентам, уширение же центральной (несмещенной) компоненты происходит ударным механизмом (см. § 5).

Анизотропия шумов. Оказывается, что измерение поляризации света внутри штарковского контура спектральной линии позволяет получить информацию о спектре электростатических шумов в турбулентной плазме [40, 41]. Влияние однородных, но анизотропных низкочастотных электростатических шумов на штарковские профили водородных линий так же может быть описано в рамках статического приближения [41]. В основу поляризационной методики кладется общее свойство поляризации штарковских компонент в постоянном электрическом поле: преимущественная группировка вблизи центра линии циркулярно поляризованных σ -компонент и удаление в крыло линейно поляризованных в направлении поля π -компонент.

Рассмотрим наиболее характерную постановку эксперимента: в установке с осью симметрии вдоль OZ ожидается появление турбулентных шумов. Естественно, что диаграмма направленности шумов должна обладать аксиальной симметрией, однако остаются неизвестными уровень турбулентности и характер анизотропии шумов.

При двух положениях поляроида (1 — параллельно оси системы, 2 — перпендикулярно ей) регистрируются профили спектральной линии $S_1(x)$ и $S_2(x)$. Для того чтобы отчетливо выявить эффект анизотропии, исследуется разность $D(x) = S_1 - S_2$ этих двух контуров (здесь $x = \lambda - \lambda_0$ — смещение от центра линии в Å).

В статическом приближении профиль линии описывается выражением:

$$S_i(x) = \sum_{k,\nu} \int_{F=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_{u=-\infty}^{\infty} W(F, \cos \theta) I_{k\nu} f_{k\nu}(\cos \theta) \delta(x - F\Delta_{k\nu} - ud) M(u) dudF d(\cos \theta). \quad (4.9)$$

Здесь индекс $i=1, 2$ соответствует положению поляроида, индекс $\nu=\pi, \sigma$ отражает характер поляризации компоненты. Второе слагаемое в аргументе δ -функции представляет собой штарковский сдвиг, где $\Delta_{k\nu} = \frac{3ea_0\lambda_0^2}{4\pi c\hbar} [n(n_1 - n_2) - n'(n'_1 - n'_2)]$ — приведенная штарковская постоянная (a_0 — боровский радиус, n — главное, n_1 и n_2 — электрические квантовые числа). Третье слагаемое — сдвиг, обусловленный эффектом Доплера, причем $d = v_0\lambda_0/c$ — доплеровская ширина ($v_0 = \sqrt{2T/M}$ — средний модуль тепловой скорости атомов в направлении луча зрения). Усреднение по скоростям производится по распределению Максвелла

$$M(u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \quad (u = v_i/v_0).$$

Набор из четырех функций $f_{iv}(\cos \theta)$ выражает угловую зависимость наблюдаемой интенсивности штарковских компонент. Эти функции легко определить, рассматривая проекции на направление поляроида 1 или 2 либо ориентированного вдоль поля \mathbf{F} излучающего диполя (π -компонента), либо вращающегося в перпендикулярной к \mathbf{F} плоскости (σ -компонента):

$$f_{1\pi} = 3 \cos^2 \theta; \quad f_{2\pi} = \frac{3}{2}(1 - \cos^2 \theta); \quad (4.10)$$

$$f_{1\sigma} = \frac{3}{2}(1 - \cos^2 \theta); \quad f_{2\sigma} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta).$$

Функции f_{iv} нормированы так, чтобы площади под контурами были равны единице: $\int S_1(x) dx = \int S_2(x) dx = 1$. При этом использовано общее свойство относительных интенсивностей I_{kv} штарковских компонент:

$$\sum_k I_{k\pi} = \frac{1}{2} \sum_k I_{k\sigma} = 1/3. \quad (4.11)$$

В разностный контур $D(x)$ входят только линейные комбинации

$$f_{1\pi} - f_{2\pi} = \frac{3}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

и

$$f_{1\sigma} - f_{2\sigma} = \frac{3}{4}(1 - 3 \cos^2 \theta).$$

Вводя обозначения

$$\tilde{I}_{k\pi} = 3I_{k\pi}, \quad \tilde{I}_{k\sigma} = -\frac{3}{2}I_{k\sigma}, \quad (4.12)$$

можно опустить индекс v при суммировании в формуле (4.9), поскольку здесь угловой множитель от v не зависит;

$$D(x) = \sum_k \tilde{I}_k \int_0^\infty dF \mathcal{F}(F) \int_{-\infty}^\infty du M(u) \delta(x - F\Delta_k - ud), \quad (4.13)$$

где

$$\mathcal{F}(F) = \int_{-1}^{+1} W(F, \cos \theta) \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta). \quad (4.14)$$

Рассмотрим случай, когда доплеровское уширение мало по сравнению со штарковским сдвигом для всех боковых компонент.

Тогда с точностью до членов второго порядка по параметру малости $\varepsilon = d/\Delta_h \langle F \rangle$:

$$D(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{T}_k}{|\Delta_k|} \mathcal{F}\left(\frac{x}{\Delta_k}\right) + \frac{\tilde{T}_0}{d} M\left(\frac{x}{d}\right) \int_0^\infty \mathcal{F}(F) dF. \quad (4.15)$$

Этот контур, кроме узкой центральной части, представляет собой обычную картину штарковского уширения спектральной линии статическими полями, с той лишь разницей, что интенсивности штарковских компонент являются в соответствии с (4.12) знакопеременными, а роль «изотропной» функции распределения играет $\mathcal{F}(F)$. Эта функция имеет простой физический смысл. Она показывает, существует ли у полей данной амплитуды F преимущественное направление и насколько это направление вероятнее остальных. При изотропном распределении шумов $\mathcal{F}(F) \equiv 0$. При отклонении от изотропии $\mathcal{F}(F)$ становится отличной от нуля, и отличие это растет с увеличением анизотропии распределения шумов. Если диаграмма направленности полей вытянута вдоль оси системы, то $\mathcal{F}(F) > 0$, а если сплюснута, то $\mathcal{F}(F) < 0$.

Обозначим $S_F = \int_0^\infty \mathcal{F}(F) dF$. Эта «норма» S_F функции $\mathcal{F}(F)$ зависит только от степени анизотропии $\eta = \langle F_F \rangle / \langle F_x \rangle$, но не от масштаба полей. Функция $S_F(\eta)$ монотонно возрастает от $-1/2$ до $+1$, причем $S_F(1) = 0$ *

В рамках этой модели функция $\mathcal{F}(F)$, следовательно, и разностный контур $D(x)$ могут быть выражены аналитически:

$$\mathcal{F}(F) = \frac{F^2}{\sqrt{8\pi} F_x F_z^2} e^{-\frac{F^2}{2F_x^2}} \left\{ \Phi\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, (F_x^{-2} - F_z^{-2}) F^2/2\right] - \Phi\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, (F_x^{-2} - F_z^{-2}) F^2/2\right] \right\}, \quad (4.16)$$

где $\Phi(\alpha, \nu, z)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Простой аналитический вид имеет также функция:

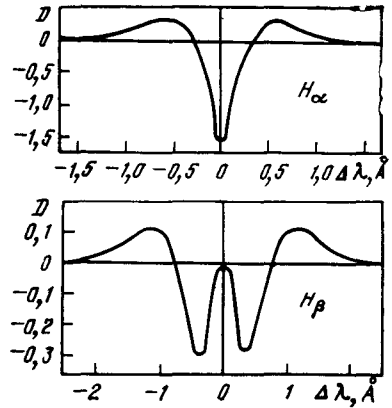
$$S_F(\eta) = \frac{\eta^2 + 1/2}{\eta^2 - 1} - \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{|\eta^2 - 1|^{3/2}} \times \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - \eta^{-2}}; & \eta > 1; \\ \ln(\eta^{-1} + \sqrt{\eta^{-2} - 1}); & \eta < 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Типичный вид расчетного разностного контура для линий H_α и H_β приведен на рис. 4. Рисунок выполнен для распределения по-

* Для упрощения записи будем обозначать ниже:

$$\langle F_\parallel^2 \rangle \equiv F_z^2, \quad \frac{1}{2} \langle F_\perp^2 \rangle \equiv F_x^2.$$

Рис. 4. Разностные контуры линий H_α и H_β в плазме с анизотропным распределением шумов



лей типа «сосиски». Для анизотропии противоположного знака (распределения типа «чечевицы») картина должна быть перевернута относительно оси абсцисс. Таким образом, по одному только виду разностного контура можно сразу качественно определить пространственную направленность шумов.

Разностный контур позволяет найти не только отношение F_z/F_x , но и каждое из этих полей в отдельности. Величину $F_{\text{макс}} = \max(F_z, F_x)$ можно оценить по положению дальнего экстремума x_{extr} разностного контура:

$$F_{\text{макс}} \approx \frac{x_{\text{extr}}}{\Delta_\pi}; \quad \left(\Delta_\pi^2 = \frac{\sum_k I_{k\pi}/\Delta_k^p}{\sum_k I_{k\pi}/\Delta_k^{p+1}}, \quad p = \begin{cases} 1, \eta > 1 \\ 2, \eta < 1 \end{cases} \right).$$

Более точно величину $F_{\text{макс}}$ можно определить по ходу интенсивности в крыле

$$D_{AS}(x) \propto \begin{cases} \exp[-x^2/2F_{\text{макс}}^2\Delta_\pi^2], & D_{AS}(x) > 0; \\ -x \exp[-x^2/2F_{\text{макс}}^2\Delta_\pi^2], & D_{AS}(x) < 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Поляризационную методику измерения анизотропии шумов можно применять даже тогда, когда доплеровское уширение превосходит штарковское. В этом случае, разлагая δ -функцию в формуле (4.13) по параметру малости $\Delta_h < F > / d \ll 1$, получаем:

$$D(x) = \sum_k \frac{\tilde{I}_h}{d} \int_0^\infty dF \mathcal{F}(F) \left\{ 1 + \frac{\Delta_h}{d} F \frac{d}{du} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_h}{d} \right)^2 F^2 \frac{d}{du^2} + \dots \right\} M(u) \Big|_{u=x/d}. \quad (4.18a)$$

Это выражение содержит суммы вида $\sum_k \tilde{I}_h(\Delta_h)^q$, $q=0, 1, 2$. Так как $\tilde{I}_{-h} = +\tilde{I}_h$, а $\Delta_{-h} = -\Delta_h$, то эти суммы отличны от нуля только при четных q . Кроме того, согласно (4.11) и (4.12) $\sum_k \tilde{I}_h = 0$, и с точностью до членов четвертого порядка по параметру $\Delta_h < F > / d$:

$$D(x) = \left(2 \frac{x^2}{d^2} - 1 \right) \frac{e^{-x^2/d^2}}{\sqrt{\pi} d} \left[\sum_k \frac{1}{2} \tilde{I}_h \frac{\Delta_k^2}{d^2} \int_0^\infty \mathcal{F}(F) F^2 dF \right]. \quad (4.19)$$

Таким образом, при $d \gg \Delta_h < F >$ разностный контур мал по сравнению с поляризационными контурами $S_i(x)$.

Влияние теплового движения уширяющих ионов на профиль линии. Критерии применимости статического приближения. Статическая теория является одной из основ описания контуров водородных линий в плазме, и поэтому важно выявить те условия «статичности» воздействия плазменного микрополя F на атом, при которых временным изменением F можно пренебречь. В § 3 уже отмечалось, что применимость статического приближения благоприятствует большому значению параметра $g_2 = N(C_2/v)^3$ (индекса модуляции). Критерий $g_2 \gg 1$ является, однако, лишь некоторым интегральным по спектру условием, не учитывающим более тонких, дифференциальных по спектру критериев.

В этой связи отметим, что само существование статического предела в теории уширения (по видимости, не связанного с характерным для этой теории фурье-разложением) заранее отнюдь не очевидно. Это нашло свое отражение в скептическом отношении к теории Хольцмарка со стороны В. Паули (1927 г., см. [42]), основным контраргументом которого был бесспорный факт нестатичности ионного микрополя. Прямой путь решения этого вопроса состоит, очевидно, в вычислении поправок на тепловое движение ионов к статическому контуру линии; требование относительной малости этих поправок и дает критерий статичности уширения ионами. В бинарном случае это было сделано в [43], в множественном (хольцмарковском) случае в рамках модели фазовой модуляции — в [13]. Наглядная физическая картина влияния теплового движения ионов на излучающий атом (в рамках той же модели) дана в [44], и ей мы будем в основном следовать ниже. Полный расчет тепловых поправок с учетом эффектов неадиабатичности проведен в [45]. Анализ тепловых поправок с учетом движения излучающего атома дан в [2].

Сложность учета эффектов нестатичности микрополя $F(t)$ связана со сложностью его статистических свойств. Действительно, при $g_2 \gg 1$ с атомом, (согласно § 3), эффективно взаимодействует большое число уширяющих частиц (обычно ионов), что приводит к весьма запутанной картине временной эволюции создаваемого ими многочастичного поля $F(t)$. Естественно, что это не позволяет определить в общем случае и характер эволюции атома, определяющей, в свою очередь, его спектр. Поэтому ниже мы ограничимся случаем, когда изменение ионного поля $F(t)$ во времени достаточно медленное.

В статическом поле $F(0)$ состояния атома водорода ориентированы вдоль оси OZ , параллельной вектору $F(0)$. При изменении $F(t)$ со временем меняются как величина вектора $F(t)$, так и его направление. Изменение величины (модуля) $F(0)$ связано, очевидно, с составляющими временных производных \dot{F}_{\parallel} , параллельными вектору $F(0)$, а изменение направления $F(0)$ — с составляющими производных \dot{F}_{\perp} , перпендикулярными $F(0)$ ($\dot{F}^2 = \dot{F}_{\parallel}^2 + \dot{F}_{\perp}^2$). Рассмотрим влияние изменений обоих типов на излучение атома.

Изменение модуля поля приводит к изменению во времени штарковских сдвигов частоты, так что изменение фазы атомного осциллятора имеет вид:

$$C_2 \int_0^{\tau} F(t) dt \approx C_2 F(0) \tau + C_2 \dot{F}(0) \frac{\tau^2}{2}.$$

Дополнительный набег фазы $\Delta\varphi(\tau) = C^2 \dot{F}(0) \frac{\tau^2}{2}$ вследствие теплового движения приводит к потере фазовой когерентности излучения. Действительно, при $\Delta\varphi(\tau) \sim 1$ атом «забывает» о своей первоначальной фазе — когерентность расстраивается. Расстройка когерентности приводит к тому, что в данном поле $F(0)$ спектр излучения атома оказывается не бесконечно узким ($\propto \delta[\Delta\omega - C_2 F(0)]$), а размытым на величину $|C_2 \dot{F}|^{-1/2}$. Время потери фазовой когерентности T_Φ по порядку величины равно

$$T_\Phi(F) \sim \langle |C_2 \dot{F}|^{-1/2} \rangle_F \sim \sqrt{T_F/C_2 F}. \quad (4.20)$$

Здесь символ $\langle \dots \rangle_F$ обозначает усреднение по всем значениям \dot{F} при фиксированном модуле поля F ; величина производной \dot{F} оценена как F/T_F , где T_F — время жизни ионного поля F , определенное ниже (см. также [7]).

С помощью (4.20) легко сформулировать критерий статичности [44]. Действительно, поле F можно считать статическим, если атом теряет когерентность быстрее, чем успевает изменить ионное поле, т. е. при

$$T_\Phi(F) \ll T_F, \quad \text{или} \quad C_2 F T_F \gg 1. \quad (4.21)$$

Для получения соответствующего спектрального критерия надо, очевидно, подставить в качестве F в (4.21) величину $\Delta\omega/C_2$, фигурирующую в статическом контуре линии.

Изменение направления поля приводит к двум важным эффектам. Во-первых, если поворот $\mathbf{F}(t)$ происходит достаточно медленно, то дипольный момент атома \mathbf{d} успевает адиабатически следовать за ним, все время сохраняя постоянной свою проекцию на направление \mathbf{F} . При такой переориентации атома изменяется проекция \mathbf{d} на направление распространения световой волны \mathbf{k} , а поскольку квадратом этой проекции определяется интенсивность излучаемого атома света, то должна возникнуть некоторая амплитудная модуляция излучения.

Второй эффект, обусловленный вращением, связан с отставанием атома от поля $\mathbf{F}(t)$ (инерционность атома). Действительно, если направить ось вращающейся системы координат вдоль поля $\mathbf{F}(t)$, то в этой системе, согласно [45], появится дополнительное «магнитное» возмущение $L_\perp \dot{\Phi}$, где $\dot{\Phi}$ — мгновенная угловая скорость поворота поля, равная

$$|\dot{\Phi}(0)| = \left| \frac{\mathbf{F}(0) \times \dot{\mathbf{F}}(0)}{F^2} \right| = \left| \frac{\dot{\mathbf{F}}_\perp}{F} \right|. \quad (4.22)$$

Это возмущение приводит, очевидно, к изменению (параболической) волновой функции и энергии излучающего атома, что сказывается на матричных элементах дипольного момента и фазе излучаемой волны.

Все указанные эффекты присутствуют, конечно, и при парных (бинарных) уширяющих столкновениях (см. § 3). Однако в рассматриваемом многочастичном случае, в отличие от бинарного, учет этих эффектов можно провести лишь в рамках теории возмущений, поскольку ни динамика атома, ни статистические свойства поля $\mathbf{F}(t)$ нам полностью не известны.

Расчеты по теории возмущений основаны на последовательном разложении волновой функции атома (а следовательно, и контура линии) по степеням вре-

менных производных поля $\dot{\mathbf{F}}$, или, что эквивалентно, по степеням параметра $g_2^{-1} \ll 1$. При этом для сферически-симметричного распределения частиц по скоростям члены первых неисчезающих порядков выражаются через средние значения квадратов производных поля $\langle \dot{\mathbf{F}}^2 \rangle_F$ при данном F . Эти величины были вычислены Чандрасекаром и фон Нейманом [7] и имеют следующие предельные выражения:

$$\langle \dot{\mathbf{F}}_{\parallel, \perp}^2 \rangle_F = \frac{45}{8} (\omega_F F_0)^2 \begin{cases} \frac{1}{3} (\parallel); & \frac{2}{3} (\perp), & \beta \ll 1; \\ \frac{8\beta^3}{45} [2(\parallel); & 1(\perp)], & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (4.23)$$

Здесь символы \parallel и \perp относятся к параллельной и перпендикулярной \mathbf{F} составляющим производной $\dot{\mathbf{F}}$, $\omega_F = \lambda^{1/2} v_0 N^{1/3}$ — характерный масштаб частоты изменения поля. Видно, что в предельных случаях $\beta \geq 1$ оба значения отличаются лишь численными множителями порядка единицы.

С помощью (4.23) легко определить время жизни T_F поля:

$$T_F \sim \dot{F} \langle |\mathbf{F}|^2 \rangle_F^{-1/2} \sim (N^{1/3} v_0)^{-1} \begin{cases} \beta, & \beta \ll 1; \\ \beta^{-1/2}, & \beta \gg 1, \end{cases} \quad (4.24)$$

т. е. максимальное время жизни оказывает у средних полей ($\beta \sim 1$), тогда как слабые ($\beta \ll 1$) и сильные ($\beta \gg 1$) поля живут малое время.

Подставляя (4.24) в (4.21), получаем следующие критерии применимости статического приближения:

$$\Delta\omega \gg \begin{cases} v^2/C_2 \equiv \Omega_B, & \Delta\omega \gg \Delta\omega_0; \\ \sqrt{C_2 N v_0}, & \Delta\omega \ll \Delta\omega_0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Более последовательные критерии статичности получаются на основе расчетов поправок к контуру линии на нестатичность ионного поля, проводимых по указанной выше схеме теории возмущений. В этих расчетах контур водородной линии выражается в виде суммы статического (хольцмарковского) $I^{(0)}$ и поправочного $I^{(1)}$ профиля, описывающего эффекты теплового движения [45]:

$$I(\omega) = I^{(0)}(\omega) + I^{(1)}(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_0} \left[\mathcal{H} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \right) + g^{-2/3} \Pi \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \right) \right]; \quad (4.26)$$

$$\Pi(x) \approx \begin{cases} a_1 x^{-7/2}, & x \gg 1; \\ a_2 x^{-2}, & x \ll 1. \end{cases} \quad (4.27)$$

Здесь функция $\Pi(x)$ выражается через функции $\langle \dot{\mathbf{F}}_{\parallel, \perp}^2 \rangle_F$ и учитывает описанные выше эффекты фазовой модуляции, амплитудной модуляции и неадиабатичности; a_1, a_2 — числовые коэффициенты, зависящие от рассматриваемой линии.

На крыле линии ($x \gg 1$) «тепловая» поправка $\Pi(x) \propto x^{-7/2}$, т. е. убывает быстрее функции Хольцмарка, причем вклады всех трех эффектов в поправку оказываются одного порядка. В этой области частот как контур линии, так и поправка к нему пропорциональны плотности частиц N , т. е. бинарны. Ясно, что

эти результаты могут быть получены и непосредственно из бинарной теории уширения в крыле линии.

В центре линии ($x \ll 1$) тепловые поправки резко возрастают (пропорционально x^{-2}), причем, как легко понять, этот эффект целиком обусловлен неадиабатичностью вращения. Действительно, из (4.22), (4.26), (4.27) видно, что неадиабатические поправки к волновой функции ψ , обусловленные вращением, определяются отношением $\dot{\varphi}/d_x F$, т. е. величиной $|\dot{F}_\perp|^2/F^2$, быстро возрастающей при приближении к центру линии ($F \propto \Delta\omega \rightarrow 0$).

Условием применимости статической теории Хольцмарка является, очевидно, требование малости второго слагаемого в (4.26) по сравнению с первым. Можно убедиться, что в предельных случаях оно эквивалентно полученному выше критерию (4.25)*. При $\Delta\omega \sim \Delta\omega_0$ (т. е. при $F \sim F_0$ — средних значениях напряженности микрополя) критерий статичности в силу порядковых соотношений $\mathcal{H}(x \sim 1) \sim 1$ и $\Pi(x \sim 1) \sim 1$ сводится просто к условию $g_2 \gg 1$, введенному в § 3. Из (4.26) видно опять-таки, что применимость статического приближения тем лучше, чем больше параметр g_2 . Однако даже для $g_2 \gg 1$ оно нарушается вблизи центра линии, при $\Delta\omega < \sqrt{C_2 N v_0} \ll \Delta\omega_0$. С другой стороны, даже при $g_2 \ll 1$ (бинарная область) статическое приближение справедливо в далеком крыле линии $\Delta\omega \gg \Omega_B \gg \Delta\omega_0$. Таким образом, статическому приближению благоприятствуют большие значения плотности N , штарковской постоянной C_2 (высоковозбужденные уровни), сдвига частоты $\Delta\omega$ (крылья линий) и малые v_0 (низкие температуры).

Приведенные результаты относились к уширению частицами одного сорта — ионами. Может, однако, реализоваться ситуация, когда учет дополнительного уширения электронами улучшает применимость статической теории для ионов в центре линии. Физическая основа этого эффекта состоит в следующем [46]. Уширение электронами носит ударный характер (см. § 5) и приводит к конеч-

ному времени жизни $\gamma^{-1} \left(\gamma \sim N \frac{C_2^2}{v_e} \ln \rho_{\max}/\rho_{\min} \right)$ — ударная электронная ширина атома на данном штарковском подуровне). Если это время жизни мало по сравнению с характерным временем изменения ионного поля $N^{-1/3}/v_0$, то это поле можно считать статическим.

Соответствующие оценки легко получить из анализа структуры тепловых поправок (4.27) в центре линии. В этой области они, как уже отмечалось, возрастают как $\Delta\omega^{-2}$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$. Учет дополнительного ударного электронного уширения приводит, грубо говоря, к замене расходящейся величины $\Delta\omega^{-1}$ конечной величиной $(\Delta\omega + i\gamma)^{-1}$. Подставляя поэтому в (4.26), (4.27) при $x \ll 1$ вместо $\Delta\omega$ величину γ , получаем оценку для поправки на тепловое движение $I^{(1)}(0)$ в центре линии:

$$I^{(1)}(0) \propto \frac{1}{\Delta\omega_0} g_i^{-2/3} g_e^{-2/3} \Lambda^{-2}, \quad (4.28)$$

где мы ввели параметры $g_e, g_i = N(C_2/v_e, i)^3$ для электронного и ионного уширения и учли, что $\gamma/\Delta\omega_0 \sim g_e^{1/3} \ln(\rho_{\max}/\rho_{\min}) \equiv g_e^{1/3} \Lambda$.

* Этот критерий получен выше на основе качественных нестрогих соображений, учитывающих лишь фазовую модуляцию. Полный анализ содержится в работе [45].

Величину $I^{(0)}(0)$ надо сравнить с $I^{(0)}(0)$ статического контура в центре линии. Используя для оценки $I^{(0)}(0)$ свертку хольцмарковского и лоренцева (электронного) контуров, получим $I^{(0)}(0) \sim \frac{1}{\Delta\omega_0} g_e^{1/2} \Lambda$. Тогда критерий статичности $I^{(0)} \gg I^{(1)}$ в центре линии примет вид [46]:

$$g_e^{1/2} g_e \Lambda^3 \gg 1, \text{ или } \frac{\rho_{\text{эф}} \gamma}{v_i} \gg 1. \quad (4.29)$$

Значение $\rho_{\text{эф}}$ практически близко к среднему межчастичному расстоянию $N^{-1/3}$. Таким образом, критерий статичности (4.29) дополняет критерий (4.25) в центре линии.

В [46] проведены более детальные расчеты изменения интенсивности в центральной части линий вследствие теплового движения ионов. Результаты расчетов неплохо согласуются с экспериментом [47].

Эффекты неоднородности микрополя. Первые моменты $\langle \dot{\mathbf{F}} \rangle_F$ скорости изменения ионного микрополя тесно связаны с его пространственными характеристиками, определяющими отклонения от однородности. Действительно, поскольку летящий со скоростью v излучающий атом как бы «прощупывает» пространственную структуру поля, скорость изменения поля в данной точке x можно выразить через моменты компонент тензора неоднородностей:

$$\langle \dot{\mathbf{F}} \rangle_F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_h} \right\rangle_F \dot{x}_h. \quad (4.30)$$

В свою очередь, именно неоднородность ионного микрополя ответственна за наблюдаемую на эксперименте [48] асимметрию спектральных линий водородоподобных систем. В самом деле, симметричное расщепление линий соответствует учету только линейных по F сдвигов шарковских компонент и использованию собственных функций нулевого приближения. В действительности микрополе ионов неоднородно в пространстве, причем масштабом этой неоднородности является среднее межчастичное расстояние $R_{\text{ср}}$. Отношение энергии квадрупольного взаимодействия к энергии дипольного взаимодействия может быть охарактеризовано как величина первого порядка малости по параметру $\epsilon = n^2 a_0 / R_{\text{ср}}$ — отношению размеров атома к масштабу неоднородности поля. Соответственно разложение энергии электростатического взаимодействия излучателя с ионами плазмы может быть представлено в виде $V = \epsilon^2 V_2 + \epsilon^3 V_3 + \epsilon^4 V_4 + \dots$, где V_2 , V_3 , V_4 — дипольный, квадрупольный и октопольный вклады. Как было показано в [49], для вырожденного уровня квантовомеханической системы, испытывающей возмущения такого типа, поправки к собственным функциям невозмущенного гамильтониана могут начинаться с линейных по ϵ членов. Для этого необходимо, чтобы вырождение снималось взаимодействием $\epsilon^2 V_2$, а взаимодействие $\epsilon^3 V_3$ имело отличные от нуля матричные элементы переходов между вырожденными прежде состояниями, разность энергии которых стала теперь равной $\Delta E_{nm} = \epsilon^2 (V_{nn}^{(2)} - V_{mm}^{(2)})$. Именно такая ситуация имеет место при одновременном учете дипольного и квадрупольного взаимодействий излучающего атома водорода с возмущающим полем иона плазмы. Квадрупольное взаимодействие приводит к переходам между состояниями, имеющими одинаковые азимутальное m и главное n квантовые числа и соответственно отличающиеся на ± 1 параболические квантовые числа n_1 и n_2 . С учетом главных, линейных по ϵ , поправочных

членов собственные функции водородного атома в параболической системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1 n_2 m}^{(1)}(\xi, \eta, \varphi) = & \Psi_{n_1 n_2 m}^{(0)} + \\ & + \frac{n a_0}{2R} \sqrt{(n_1 + 1)(n - n_1 - 1)n_2(n - n_2)} \Psi_{n_1 + 1, n_2 - 1, m}^{(0)} \rightarrow \\ & \rightarrow - \frac{n a_0}{\sqrt{2}R} \sqrt{(n - n_1)n_1(n - n_2 - 1)(n_2 + 1)} \Psi_{n_1 - 1, n_2 + 1, m}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь $\Psi_{n_1 n_2 m}^{(0)}$ — невозмущенные собственные функции в параболических координатах ξ, η, φ . Возмущающий ион расположен на расстоянии R на положительной части оси OZ .

Последовательное построение теории возмущений по параметру ε [50] позволяет получить выражение для профиля линии с учетом — асимметрии, не ограниченное приближением «ближайшего соседа», как это имело место в первоначальной трактовке эффекта [51]:

$$I(\Delta\omega) = d\beta \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\left(\Delta\omega - \frac{C_2 F_0 \beta}{e}\right)^2 + \gamma^2} \left\{ \mathcal{H}(\beta) + \frac{n^2 a_0}{R} [a_1 \Lambda(\beta) + a_2 \chi(\beta)] \right\}. \quad (4.32)$$

Здесь C_2 — штарковская постоянная компоненты, γ — ее ударная полуширина; функции $\Lambda(\beta)$ и $\chi(\beta)$ связаны с первыми моментами функции $W(F, \partial F_i / \partial x_k)$ по компонентам тензора неоднородности поля ионов, т. е. с $(\partial F_i / \partial x_k)$. В работе [50] эти функции затабулированы и на их основе проведены численные оценки эффекта сдвигов центра тяжести линий.

Вычисление профиля \mathcal{H}_β приводит к асимметрии, которая заключается в превышении интенсивности «синего» максимума над интенсивностью «красного». Аналогичная асимметрия возникает также в случае линий L_β , L_δ , H_δ и HeII $\lambda = 3203 \text{ \AA}$. Для первых членов серий (L_α , H_α , HeII $\lambda = 4686 \text{ \AA}$) характерна иная картина: увеличивается интенсивность «красного» крыла линии, а интенсивность синего — падает. Центральная же компонента этих линий испытывает небольшой сдвиг в синюю сторону. Асимметрию далеких крыльев удобно выражать с помощью отклонений $(\Delta\lambda)_1$ и $(\Delta\lambda)_2$, связанных с точками равной интенсивности λ_1 и λ_2 на противоположных крыльях линии: $I_+(\lambda_1) = I_-(\lambda_2)$;

$$(\Delta\lambda)_1 = \frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2|; \quad (\Delta\lambda)_2 = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_0.$$

Для достаточно больших расстояний от центра линии существует простая функциональная зависимость между $(\Delta\lambda)_2$ и $(\Delta\lambda)_1$:

$$(\Delta\lambda)_2 = C (\Delta\lambda)_1^{3/2},$$

причем значение коэффициента C определяется только параметрами, входящими в квадрупольные поправки к частотам и интенсивностям штарковских компонент [49].

Описанная выше трактовка асимметрии контура водородных спектральных линий основана на статическом описании ионов и ударном механизме уширения электронами. В этом случае вклады от разноименно заряженных частиц имеют

существенно разную природу и обусловленные ими квадрупольные поправки не могут взаимно уничтожаться. Область, где и электроны могли бы также трактоваться статически, обычно лежит в достаточно далеком крыле, не влияющем на основные качественные эффекты асимметрии.

В формировании асимметрии профиля обычно основную роль играют именно поправки первого порядка по параметру $\epsilon = n^2 a_0 / R$, которые обусловлены квадрупольным взаимодействием. Попытки учесть поправки более высокого порядка, особенно для центральных несмещенных компонент, обычно приводят к нарушению принятого предположения о малости ϵ , так как их роль становится существенной лишь при $\epsilon \sim 1$. В этом случае более естественным оказывается использование эллиптических координат для двухцентровой задачи, т. е. рассмотрение возбужденных состояний молекулярного иона. Рассмотрение подобного рода [52, 53] приводит к предсказанию «спутников» на далеких крыльях линии L_{α} , которые, в сущности, описывают возбужденные состояния молекулы НХ. Вопрос о заселенности таких состояний и их действительном проявлении в экспериментальных условиях остается пока невыясненным.

§ 5. Ударная теория уширения частицами и волнами

Ударное уширение атомных состояний вследствие столкновений с частицами плазмы (обычно электронами) было подробно исследовано в § 3. Согласно сказанному в § 3, в ударном уширении невродородоподобных атомов следует различать случаи адиабатического и неадиабатического уширения, различающиеся параметром (3.34). В адиабатической ударной теории контур линии имеет лоренцеву форму с постоянной (ударной) шириной $\gamma \sim N v \sigma_B$, определяющейся сечением оптических (вайскопфовских) столкновений. Так, в случае квадратичного штарк-эффекта ширина γ равна [1]:

$$\gamma \approx 11,4 N C_4^{2/3} v^{1/3}. \quad (5.1)$$

Усредненный оператор эволюции T атома выражается согласно (3.36), (3.37) через оператор ударного электронного уширения $\hat{\Phi}_{ab}$. Подставляя $T(t)$ в общие формулы для контура линии (1.14), получаем:

$$I_{ab}(\omega) = -\text{Re} \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \langle \beta | \mathbf{d} | \alpha \rangle \langle \alpha' | \mathbf{d} | \beta' \rangle \times \\ \times \langle \langle \alpha \beta | [i\omega - i/\hbar (\hat{H}_{0a} - \hat{H}_{0b}) + \hat{\Phi}_{ab}]^{-1} | \alpha' \beta' \rangle \rangle, \quad (5.2)$$

где символ $\langle \langle \alpha \beta |$ обозначает взятие матричных элементов по волновым функциям верхнего и нижнего уровней атома (так называемый сдвоенный атом):

$$\langle \langle \alpha \beta | U_a U_b | \alpha' \beta' \rangle \rangle = \langle \alpha | U_a | \alpha' \rangle \langle \beta | U_b^* | \beta' \rangle.$$

Из (5.2) видно, что контур линии в ударном случае выражается через оператор резольвенты, содержащий оператор $\hat{\Phi}$. Поскольку последний получен усреднением по совокупности сферически-симметричных столкновений, он также сферически-симметри-

чен, и потому оператор резольвенты в (5.2) может быть диагонализирован в сферических координатах. Однако в случае уширения водородоподобных линий «правильными» состояниями атома являются не сферические, а параболические волновые функции с осью OZ , направленной вдоль статического электрического поля ионов F . Поэтому оператор ударного электронного уширения Φ наряду с диагональными матричными элементами имеет также и недиагональные. Отличные от нуля матричные элементы оператора $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ (входящие в оператор Φ) в параболических координатах имеют вид [54]:

$$\langle n_1 n_2 m | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} | n_1 n_2 m \rangle = a_0^2 \frac{9}{4} n^2 [n^2 + (n_1 - n_2)^2 - m^2 - 1]; \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \langle n_1' n_2' m | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} | n_1 n_2 m \rangle = & a_0^2 \frac{9}{4} n^2 \left[\delta_{n_1', n_1-1} \times \right. \\ & \times \delta_{n_2', n_2+1} \sqrt{n_1(n-n_1)(n_2+1)(n-n_2-1)} + \\ & \left. + \delta_{n_1', n_1-1} \delta_{n_2', n_2-1} \sqrt{n_2(n-n_2)(n_1+1)(n-n_1-1)} \right]. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Действительная часть оператора $\text{Re}\Phi = \Gamma$ определяет ударную ширину линии, а мнимая $\text{Im}\Phi = D$ — ее сдвиг. Непосредственный смысл ширины лоренцева контура имеет лишь диагональный матричный элемент $\text{Re}(\Phi_\alpha)_{\alpha\alpha}$, тогда как в общем случае даже общий вид контура не имеет лоренцевой формы (см. ниже).

Расчеты ударного контура линии $I_{ab}(\omega)$ при фиксированном ионном поле F требуют трудоемких вычислений, связанных с диагонализацией оператора резольвенты (5.2), которая оказывается тем сложнее, чем больше компонент у линии. Аналитическое исследование возможно лишь для простейших линий L_α, L_β . Рассмотрим, следуя [55, 56], характер спектра линии L_α .

Гамильтониан атома $\hat{H}_0(F)/\hbar - i\hat{\Phi}$, включающий взаимодействие с ионным полем F и ударное электронное уширение, неэрмитов. Для построения его собственных функций $|\psi_\alpha\rangle$ будем исходить из параболических состояний $|\varphi_\beta\rangle$, диагонализующих оператор $\hat{H}_0(F)$. Для этого построим матрицу \hat{C}_β , определяющую переход от базиса $|\varphi_\beta\rangle$ к базису $|\psi_\alpha\rangle$. Поскольку оператор резольвенты неэрмитов, найденную систему кет-векторов $|\psi_\alpha\rangle$ необходимо дополнить ортогональной ей системой бра-векторов $\langle\chi_\alpha|$. Эта система получается из $\langle\varphi_\beta|$ с помощью матрицы $\hat{C}_{\alpha\beta}^{-1}$, причем матрица \hat{C} не является унитарной: $\hat{C}^{-1} \neq \hat{C}^\dagger$. Найдя функции $|\psi_\alpha\rangle$ и $\langle\chi_\alpha|$, мы диагоналируем, очевидно, оператор резольвенты и вычислим контур линии. Так, для простейшей линии L_α (уровень $n=2$) собственные значения $E_{1,2}$ оператора $\hat{H}_0 - i\hat{\Phi}$ равны:

$$E_{1,2}/\hbar = \omega \pm \Omega + i\omega; \quad \Omega \equiv \sqrt{(\Delta/2)^2 - \beta^2}, \quad (5.5)$$

где ω и β — соответственно диагональный и недиагональный матричные элементы $\hat{\Phi}$; Δ — расщепление уровней в ионном поле. Из (5.5) видна своеобразная роль недиагонального элемента β : из-за наличия β уровни энергии E_1 и E_2 не расталкиваются, а, наоборот, эффективно притягиваются. В частности, при $\beta = \Delta/2$ имеется точка $E_1 = E_2$ вырождения, или слияния (коллапса) обоих состояний. Характер спектра в этой точке существенно меняется, поскольку здесь величина Ω становится чисто мнимой. Вклад боковых (смещенных) штарковских компонент в контур линии вне области слияния имеет вид [55]:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\omega + (\beta/\Omega)(\Delta\omega + \Omega)}{(\Delta\omega + \Omega)^2 + \omega^2} + \frac{\omega - (\beta/\Omega)(\Delta\omega - \Omega)}{(\Delta\omega - \Omega)^2 + \omega^2} \right]. \quad (5.6)$$

Видно, что контур линии не описывается простой дисперсионной (лоренцевой) кривой. При $\Delta/2 < \beta$ (в области слияния) характер спектра меняется: здесь величина Ω входит аддитивно с диагональным матричным элементом ω . Эффект слияния приводит к некоторому сужению линии.

Для линий с большим числом компонент (например, серии Бальмера) аналитическая диагонализация револьвенты затруднительна. Обычно процедура обращения матриц в (5.2) выполняется численно (см. [57, 58], а также § 8).

Результирующий контур линии, возникающий при одновременном статическом уширении ионами и ударном уширении электронами, вычисляется усреднением (5.2) по статическому распределению ионных микрополей $W(F)$:

$$I_{ab}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dFW(F) \sum \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \langle \langle \alpha \alpha' | [i(\Delta\omega - C_{\alpha\beta}F) - \hat{\Phi}_{ab}]^{-1} | \beta \beta' \rangle \rangle, \quad (5.7)$$

где $C_{\alpha\beta}$ — разность штарковских постоянных верхнего (α) и нижнего (β) состояний, между которыми рассматривается излучательный переход.

Расщепление линии при наименьшей величине поля $F_0 \sim eN^{2/3}$ значительно превосходит ударную ширину линии [их отношение, как легко убедиться, совпадает с параметром $g_2 = = N(C_2/v_e)^3 \ll 1$, определяющим применимость ударного приближения]. При таких полях роль недиагональных матричных элементов оператора $\hat{\Phi}_{ab}$ мала [см. (5.6)] и ударный контур хорошо описывается дисперсионной (лоренцевой) профилем с шириной $\Gamma_{\alpha\beta}$, определяющейся диагональными матричными элементами оператора $\hat{\Phi}_{ab}$, так что в области $\Delta\omega \gg \Gamma_{\alpha\beta}$

$$I_{ab}(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dFW(F) \sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha} \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{(\Delta\omega - C_{\alpha\beta}F)^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^2}. \quad (5.8)$$

Эффекты уширения линий в плазме вызываются, как отмечалось в § 1, электрическими полями не только отдельных частиц, но и коллективных плазменных колебаний. Последние естественно разделить на низкочастотные — НЧ и высокочастотные — ВЧ. НЧ-шумы обусловлены, как правило, колебаниями ионной компоненты плазмы и приводят к квазистатическому уширению состояния атома (см. § 2). Более быстрые ВЧ-шумы, обусловленные электронными колебаниями, вызывают уширение ударного типа. Применимость ударного приближения в данном случае основана на малости параметра

$$d\mathcal{E}_0\tau_c/\hbar \ll 1, \quad (5.9)$$

где \mathcal{E} — амплитуда ВЧ-шумов (d — дипольный момент атома); τ_c — характерное время корреляции ВЧ-шумов, равное, по порядку величины, обратной полуширине спектра шумов γ_p^{-1} . Параметр (5.9) является аналогом введенного выше индекса модуляции.

При выполнении условия (5.9) эволюцию атомного состояния на временах $t \gg \tau_c \sim \gamma_p^{-1}$ можно, согласно общим принципам ударной теории, описывать усредненными величинами типа оператора ударного уширения $\hat{\Phi}$ [ср. § 3].

Рассмотрим, следуя [59], характер эволюции водородного атома, испытывающего воздействие стохастического ВЧ-поля (для определенности, ленгмюровских) шумов:

$$E_l(t) = \sum_{j=1}^J E_j(t) \cos \{ \Omega_j t + \varphi_j(t) \}, \quad (5.10)$$

где φ_j , E_j — случайные фазы и амплитуды ВЧ-колебаний.

В ударном приближении можно считать, что изменения фазы и амплитуды происходят мгновенно, причем за интересующие нас отрезки времени $t \gg \gamma_p^{-1}$ число таких изменений Q велико: $Q \sim \gamma_p t \gg 1$, так что, например, для фазы φ_j имеем:

$$\varphi_j(t) = \sum_q^{Q(t)} \varphi_{jq} \theta(t - T_{jq}) \theta(T_{jq+1} - t) \quad (\varphi_{jq} = \text{const}). \quad (5.11)$$

Здесь $\theta(x)$ — ступенчатая тета-функция; T_{jq} — момент q -й сбивки фазы и амплитуды j -го пакета волн; промежутков $\Delta t_{jq} = T_{jq+1} - T_{jq}$ между сбивками фаз есть случайная величина, распределенная с плотностью $\gamma_p = \exp[-\gamma_p \Delta T_{jq}]$.

Найдем оператор эволюции $\hat{T}(0, \tau)$ атомного уровня на отрезке $(0, \tau)$. Уравнения для матричных элементов оператора эволюции имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} i \hbar \hat{T}_{\alpha\alpha'} &= \sum_{\alpha''} e^{i\omega_{\alpha\alpha''}\tau} d_{\alpha\alpha''} E(\tau) \cos[\Omega\tau + \varphi(\tau)] T_{\alpha''\alpha'}; \\ T_{\alpha\alpha'}(0) &= \delta_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Воспользуемся для решения (5.12) теорией возмущений второго порядка. Нетрудно убедиться, что в возникающем при этом двойном суммировании по

переменным q и j останутся лишь слагаемые с $q=q'$ и $j=j'$, что дает*:

$$\begin{aligned} [\widehat{T}_l(\tau, 0) - 1]_{\alpha\alpha}^{(2)} = & -\frac{1}{12\hbar^2} \sum_{\alpha', j, q} |d_{\alpha\alpha'}|^2 E_{jq}^2 \left[\frac{i \Delta T_{jq}}{\omega_{\alpha\alpha'} - \Omega_j} + \right. \\ & + \frac{1 - \exp\{i(\omega_{\alpha\alpha'} - \Omega_j) \Delta T_{jq}\}}{(\omega_{\alpha\alpha'} - \Omega_j)^2} + \frac{i \Delta T_{jq}}{\omega_{\alpha\alpha'} + \Omega_j} + \frac{1 - \exp\{i(\omega_{\alpha\alpha'} + \Omega_j) \Delta T_{jq}\}}{(\omega_{\alpha\alpha'} + \Omega_j)^2} \left. \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Полагая для простоты распределение $P(\Omega_j)$ частот Ω_j достаточно узким: $P(\Omega_j) \sim \delta(\Omega - \Omega_j)$, приводя усреднение по распределению ΔT_{jq} и обозначая

$$E_0^2 = \sum_{j=1}^J E_j^2, \quad \text{из (5.13) находим}$$

$$\begin{aligned} [\widehat{T}_l(\tau, 0) - 1]_{\alpha\alpha}^{(2)} = & \left\{ -\frac{E_0^2}{12\hbar^2} \sum_{\alpha'} |d_{\alpha\alpha'}|^2 \left[\frac{1}{\gamma_p - i(\omega_{\alpha\alpha'} - \Omega)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\gamma_p + i(\omega_{\alpha\alpha'} + \Omega)} \right] \right\} \tau. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (5.14) видно, что как и в обычной ударной теории, приращение оператора эволюции на интервале $\tau \gg \tau_c$ оказывается пропорциональным τ , так что

$$[T_l(\tau, 0)]_{\alpha\alpha} = \exp[\Phi_{\alpha\alpha}^c(F) \tau], \quad (5.15)$$

где $\Phi_{\alpha\alpha}^c(F) = \Gamma_{\alpha}^c(F) + i D_{\alpha}^c(F)$ — оператор ударного уширения коллективными ВЧ-колебаниями плазмы, действительная и мнимая части которого определяют ширину Γ_{α}^c и сдвиг D_{α}^c линии:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha}^c(F) = & \frac{E_0^2 \gamma_p}{12\hbar^2} \left[\frac{2 |d_{\alpha\alpha}|^2}{\gamma_p^2 + \Omega_p^2} + (|d_{\alpha\alpha-1}|^2 + |d_{\alpha\alpha+1}|^2) \left(\frac{1}{\gamma_p^2 + (\omega_F - \Omega_p)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\gamma_p^2 + (\omega_F + \Omega_p)^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$D_{\alpha}^c(F) = \frac{F_0^2}{12\hbar^2} (|d_{\alpha\alpha-1}|^2 - |d_{\alpha\alpha+1}|^2) \left[\frac{\omega_p - \Omega_p}{\gamma_p^2 + (\omega_p - \Omega_p)^2} + \frac{\omega_p + \Omega_p}{\gamma_p^2 + (\omega_p + \Omega_p)^2} \right]; \quad (5.17)$$

$$d_{\alpha\alpha}^2 = e^2 a_0^2 \frac{9}{4} n^2 (n_1 - n_2)^2, \quad |d_{\alpha\alpha-1}|^2 - |d_{\alpha\alpha+1}|^2 = d_{\alpha\alpha}^2 / (n_1 - n_2),$$

$$|d_{\alpha\alpha-1}|^2 + |d_{\alpha\alpha+1}|^2 = \frac{d_{\alpha\alpha}^2 [n^2 - (n_1 - n_2) - m^2 - 1]}{2(n_1 - n_2)^2}.$$

* Распределение ВЧ-шумов предполагается изотропным, так что $(d_{\alpha\alpha'} E_{jq}) \times (d_{\alpha'\alpha} E_{jq}) = |d_{\alpha\alpha'}|^2 E_{jq}^2 / 3$. Здесь и ниже выписываются лишь диагональные матричные элементы оператора $\widehat{T}(0, \tau)$, играющие основную роль вдали от центра линии.

Из (5.14) и (5.15) видно, что критерием применимости ударной теории является, как и выше, возможность выбора интервала Δt , с одной стороны, большого — $\Delta t \gg \tau_c$, а с другой стороны, — малого по сравнению с характерным временем изменения $\tau_{эф} \sim |\Gamma_\alpha^c|^{-1}$ самого оператора эволюции. Совместность этих условий приводит к критерию (5.9).

Воздействие ВЧ-шумов на атом в плазме приводит, таким образом, к увеличению ударной ширины линии. Для центральных компонент лаймановских линий «коллективная» ширина Γ_α^c имеет порядок величины:

$$\Gamma_\alpha^c \approx \frac{2\gamma_p \varepsilon_\alpha^2}{\Omega_p^2}, \quad \varepsilon_\alpha^2 = \frac{(|d_{\alpha\alpha-1}|^2 + |d_{\alpha\alpha+1}|^2) E_0^2}{12\hbar^2}. \quad (5.18)$$

Профиль центральной компоненты имеет лоренцев вид с шириной Γ , являющейся суммой столкновительной Γ^e (электронной) и коллективной Γ^c ширин.

Провалы на контурах водородных линий. Отличительным свойством коллективной ширины Γ^c является ее резонансный характер. Действительно, когда частота штарковского расщепления боковых компонент попадает в резонанс с частотой ВЧ-шумов Ω_p , ширина линии резко возрастает. Поэтому, согласно (5.8), атомы, находящиеся в статических полях $F^* = \hbar\Omega_p/|d_{\alpha\alpha} - d_{\alpha-1\alpha-1}|$, излучают более широкий (по сравнению с другими атомами) лоренцев профиль, который, следовательно, менее интенсивен в своей центральной части. Поэтому огибающая профиля вблизи частоты $\omega = -d_{\alpha\alpha}F^*/\hbar \equiv \omega_1$ имеет провал интенсивности. Частоты, соответствующие появлению провалов интенсивности, с учетом уширения как верхнего (α), так и нижнего (β) уровней равны [59]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \left[(n_1 - n_2)_\alpha - \frac{n_b}{n_a} (n_1 - n_2)_\beta \right] \Omega_p; \\ \omega_2 &= \left[\frac{n_a}{n_b} (n_1 - n_2)_\alpha - (n_1 - n_2)_\beta \right] \Omega_p = \frac{n_a}{n_b} \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Описанная картина провалов получена в рамках ударного приближения, отвечающего условию (5.9). В действительности нередко приходится иметь дело со случаем сильных турбулентных полей, когда знак неравенства в условии (5.9) меняется на обратный. В этом случае характерное время изменения оператора эволюции оказывается, как видно из (5.12), порядка $|d_{\alpha\alpha'} E_0|^{-1} \ll \tau_c \sim \gamma^{-1}_p$. Поэтому, в отличие от ударного приближения, временную зависимость фазы и амплитуды ВЧ-шумов здесь можно не учитывать. Характер эволюции атома нетрудно уяснить, используя резонансное приближение, отвечающее условию:

$$|\omega_{\alpha\alpha'} - \Omega_p| \ll \varepsilon_\alpha. \quad (5.20)$$

Для этого заметим, что в системе уравнений (5.12), связывающих величины $T_{\alpha\alpha'}$, имеется относительно независимый блок уравнений следующего вида:

$$i \hbar \dot{T}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{d}_{\alpha\alpha-1} T_{\alpha-1\alpha} e^{-i\varphi} + \mathbf{d}_{\alpha\alpha+1} T_{\alpha+1\alpha} e^{+i\varphi}); \quad (5.21)$$

$$i \hbar \dot{T}_{\alpha-1\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{d}_{\alpha-1\alpha} T_{\alpha\alpha} e^{+i\varphi} + \mathbf{d}_{\alpha-1\alpha-1} T_{\alpha-1\alpha} e^{-i\varphi}); \quad (5.22)$$

$$i \hbar \dot{T}_{\alpha+1\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{d}_{\alpha+1\alpha} T_{\alpha\alpha} e^{-i\varphi} + \mathbf{d}_{\alpha+1\alpha+2} T_{\alpha+2\alpha} e^{+i\varphi}), \quad (5.23)$$

где индексы $\alpha+k$ использованы для обозначения состояний, разделенных энергетическим расщеплением $k \frac{3}{2} n \frac{\hbar}{me} F$.

Подставляя (5.22), (5.23) в продифференцированное уравнение (5.21) и усредняя по случайным фазам φ , находим:

$$-\hbar^2 \ddot{T}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4} [(\mathbf{d}_{\alpha\alpha-1} \mathbf{E})(\mathbf{d}_{\alpha-1\alpha} \mathbf{E}) + (\mathbf{d}_{\alpha\alpha+1} \mathbf{E})(\mathbf{d}_{\alpha+1\alpha} \mathbf{E})] T_{\alpha\alpha}, \quad (5.24)$$

откуда следует, что решение осциллирует с частотой

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_1, n_2, m} &= \frac{E_0}{\hbar \sqrt{12}} \left[\left| \mathbf{d}_{n_1 n_2 m-1}^{n_1 n_2 m} \right|^2 + \left| \mathbf{d}_{n_1 n_2 m+1}^{n_1 n_2 m} \right|^2 \right]^{1/2} = \\ &= (\sqrt{6}/8\pi) (ea_0 E_0 / \hbar) [n^2 - (n_1 - n_2)^2 - m^2 - 1]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Эти осцилляции приводят к дополнительному расщеплению каждой штарковской компоненты на два подуровня, отстоящих друг от друга по частоте на величину $2\varepsilon_\alpha$. По существу, здесь реализуется квазиэнергетический спектр двухуровневой системы, испытывающей воздействие резонансного монохроматического поля [60].

Наличие дополнительного расщепления приводит, очевидно, также к образованию провалов на контурах водородных линий в условиях резонанса (5.20). Поскольку образование таких провалов связано, как и выше, с резонансом между частотой ВЧ-поля и частотой штарковского расщепления в НЧ-полях, их положение определяется прежними формулами (5.19). Полуширина $\Delta\omega_{1/2}$ этих провалов зависит от величины расщепления:

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_v \varepsilon_v / \Omega_p, \quad v \equiv \alpha, \beta, \quad (5.26)$$

т. е. пропорциональна амплитуде E_0 ВЧ-шумов.

Таким образом, по экспериментально измеренной ширине провала $\Delta\lambda_{1/2}$ для линии с длиной волны λ_0 нетрудно определить среднюю амплитуду E_0 ленгмюровских шумов, кВ/см:

$$E_0 = \frac{7,6 \cdot 10^9 [\Delta\lambda_{1/2}, \text{ \AA}]}{[n_v^2 - (n_1 - n_2)_v - m_v^2 - 1]^{1/2} |n_\alpha (n_1 - n_2)_\alpha - n_\beta (n_1 - n_2)_\beta| [\lambda_0 \text{ \AA}]} \quad (5.27)$$

Положения провалов, рассчитываемые по формулам (5.19), хорошо совпадают с экспериментально наблюдаемыми провалами на контурах водородных линий в турбулентной плазме [61, 62] (см. также § 8).

§ 6. Переход от ударного механизма уширения к статическому

Вопрос о взаимоотношении ударного и статического механизмов уширения был подробно рассмотрен в § 3 при анализе характера временной эволюции атома. Поскольку контур линии получается, согласно (1.13) простым фурье-обращением оператора эволюции, вопрос о соотношении между статической и ударной областями в спектре линии решается на основе элементарного «соотношения неопределенности» при фурье-анализе: $\Delta\omega\Delta\tau \sim 1$. Таким образом, статическое приближение отвечает малым временам $\tau \ll \tau_c$, или большим сдвигам частоты $\Delta\omega \gg \tau_c^{-1}$, т. е. крыльям линии. Напротив, ударное приближение справедливо на больших временах $\tau \gg \tau_c$, соответственно малых частотных сдвигах, т. е. вблизи центра линии $\Delta\omega \ll \tau_c^{-1}$.

Здесь мы хотим обратить внимание на принципиальную значимость этого вопроса для правильного построения свертки статического ионного и ударного электронного уширения. В самом деле, если использовать для построения полного контура, водородной линии чисто ударный лоренцев контур для электронного уширения, то в далеком крыле (т. е. при $\Delta\omega \rightarrow \infty$) этот контур распадается, как легко сообразить, на два члена:

$$I(\omega) \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow \infty} \frac{NC_2^{3/2}}{\Delta\omega^{5/2}} + \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\Delta\omega^2}. \quad (6.1)$$

Первый член в (6.1) отвечает бинарному статическому уширению ионами, а второй — ударному уширению электронами. Сравнивая оба члена, убеждаемся, что второй начинает преобладать над первым при $\Delta\omega \gtrsim v_2^2/C_2 = \tau_c^{-1}$. Но именно в этой области электронное уширение перестает быть ударным. Поэтому для правильного построения контура в асимптотической области необходимо учитывать смену ударного механизма уширения статическим для электронов в далеком крыле линий.

Переход к статическому уширению принято характеризовать так называемым относительным числом статически уширяющих частиц R :

$$R(\Delta\omega) = I(\omega)/I_{ст}(\omega) = I(\omega) \Delta\omega^{5/2}/NC_2^{3/2}. \quad (6.2)$$

При $R=1$ статичны только ионы, а при $R=2$ — и ионы и электроны.

Переход от ударного к статическому пределу особенно просто проследить в бинарной адиабатической модели уширения. Действительно, беря преобразование Фурье от корреляционной функции (3.19), после однократного интегрирования по частям получаем:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{i\Delta\omega} + \frac{N}{i\Delta\omega} \int_0^{\infty} d\tau e^{-i\Delta\omega\tau} V'(\tau) e^{-NV(\tau)} \right]. \quad (6.3)$$

Характерным масштабом изменения функций $V(\tau)$ и $V'(\tau)$ является, как отмечалось, величина Ω^{-1} . Преобразуем тождественно формулу (6.3), прибавив и вычтя из $V'(\tau)$ его значение $V'(\infty)$, см. (3.27). Тогда один из получающихся интегралов сводится к $I(\omega)$, а во втором можно положить $e^{-NV(\tau)} \approx 1$. Действительно, под знаком этого интеграла стоит разность $V'(\tau) - V'(\infty)$, обращаю-

щаяся в нуль при $\tau \gg \Omega^{-1}$, но именно в этой области значение $NV(\tau)$ мало: $N|V(\tau \leq \Omega^{-1})| \sim N|V'(\infty)|\Omega^{-1} = g \ll 1$, что как раз совпадает с параметром g , определяющим применимость бинарного приближения. Дальнейшие простые преобразования приводят к результату [28, 63]:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(\omega)}{\Delta\omega^2 + \gamma^2(0)}; \quad (6.4)$$

$$\gamma(\omega) = N \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\Delta\omega\tau} V''(\tau) = \pi N v \int_0^{\infty} d\rho \rho \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \kappa(t) \exp[i\Delta\omega t - i \int_0^t d\tau \kappa(\tau)] \right|^2. \quad (6.5)$$

Из (6.4) и (6.5) следует, что контур линии в бинарном приближении $g \ll 1$ имеет структуру формулы Лоренца, однако, в отличие от нее, ширина этого контура является не постоянной, а сама зависит от $\Delta\omega$. Масштабом изменения этой «переменной» ширины является вайскопфовская частота Ω , что следует из очевидных соображений, связанных с «соотношением неопределенности» при Фурье-анализе столкновительного объема $V(\tau)$. Удобно поэтому перейти к безразмерной частоте $x = \Delta\omega/\Omega$, определяя безразмерный контур $I(x)$ из соотношения $I(x)dx = I(\omega)d\omega$. Тогда из (6.5) следует:

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \frac{g\gamma(x)}{x^2 + g^2\gamma^2(x)}. \quad (6.6)$$

При $x \ll 1$ переменная ширина $\gamma(x)$ выходит на ее постоянное значение $\gamma(0)$, совпадающее с ударной адиабатической шириной линии.

При $x \gg 1$ изменение $\gamma(x)$ таково, что обеспечивает выход $I(x)$ на его статический предел. Для случая линейного штарк-эффекта (водородные линии) функция $\gamma(x)$ выражается в явном аналитическом виде [12]:

$$\gamma(x) = \pi \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} k_{1/y}^2(2xy), \quad k_{\nu}(z) = \frac{W_{\nu, \frac{1}{2}}(z)}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}, \quad (6.7)$$

где $W_{\lambda, \nu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (функция Уиттекера [64]), $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Предельные значения $\gamma(x)$ таковы:

$$\gamma(x) \approx \begin{cases} -\pi^2 [\ln x + C] \equiv \gamma_{уд}, & x \ll 1; \\ 2\pi^2/\sqrt{x} \equiv \gamma_{ст}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (6.8)$$

Подстановка (6.8) в (6.6) обеспечивает получение ударной формулы Лоренца с постоянной шириной $\gamma_{уд}^*$ при $x \ll 1$ и результата бинарной статической теории (4.5) при $x \gg 1$. Таким образом, формула (6.6) обеспечивает плавный переход от ударного к статическому пределу уширения. Этот переход происходит

* Логарифмическая расходимость $\gamma(x)$ при $x \rightarrow 0$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) в действительности несущественна, поскольку выше не учитывалась дебаевская экранировка; с учетом ее $\Delta\omega$ в (6.8) следует заменить на плазменную частоту ω_p при $\Delta\omega < \omega_p$, см. [1, 2]. Заметим, однако, что при $\Delta\omega > \omega_p$ в качестве верхней длины обрезания в (6.8) входит так называемый радиус Льюиса $\rho_L \sim v/\Delta\omega$, появление которого обусловлено далекодействующим характером кулоновского взаимодействия [37], см. выше, § 3.

при $x \sim 1$, когда слагаемое $g^2 \nu^2(x) \ll 1$ в знаменателе (6.6) уже можно не учитывать. С помощью функции $\gamma(x)$ параметр R в (6.7) выражается, очевидно, в виде

$$R(\Delta\omega) = 1 + \frac{\gamma(\Delta\omega/\Omega)}{\gamma_{\text{ст}}(\Delta\omega/\Omega)}; \quad \gamma_{\text{ст}}(z) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{z}}. \quad (6.9)$$

Формула (6.9), с учетом (6.8), описывает монотонное увеличение доли статически уширяющих частиц при удалении в крыло линии. Использование переменной ширины $\gamma(\omega)$ устранил, очевидно, некорректную асимптотику (6.1) полного контура линии.

Изложенные результаты основывались на адиабатической модели. Однако, как показано в § 3, эволюция водородных состояний в точной неадиабатической теории оказывается во многом аналогичной адиабатической теории. Это обусловлено спецификой водородного вырождения. Поэтому переход от ударного уширения к статическому в точной теории содержит усложнения лишь технического плана, связанные с учетом неадиабатической связи большого числа вырожденных состояний. Так, для контура линии L_α на основе использования точных волновых функций (3.54), (3.55) получается выражение:

$$I(\omega) = \frac{9}{\pi} N \frac{(\hbar/mv)^2}{v} \left[\gamma\left(\frac{3\Delta\omega\hbar}{mv^2}\right) + \gamma\left(-\frac{3\Delta\omega\hbar}{mv^2}\right) \right] \Delta\omega^{-2}, \quad (6.10)$$

где $\gamma(x)$ — переменная ширина линии, выражающаяся, как и (6.7), аналитически:

$$\gamma(x) = \frac{\pi^3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \left[k_{\sqrt{1+t^2-1}}^2(xt) + k_{\sqrt{1+t^2+1}}^2(xt) + 2t^2 k_1^2(xt) \right]. \quad (6.11)$$

Предельные значения $\gamma(x)$ имеют вид:

$$\gamma(x) \approx \begin{cases} -4\pi \ln x \equiv \gamma_{\text{уд}}, & x \ll 1; \\ 2\pi^2/\sqrt{x} = \gamma_{\text{ст}}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (6.12)$$

Наибольшее отличие (в $\pi^2/4$ раз) от результатов адиабатической модели (6.8) наблюдается в ударной области $x \ll 1$, тогда как статические пределы ($x \gg 1$), где влияние эффектов неадиабатичности несущественно, одинаковы.

В промежуточной области $x \sim 1$ различие обеих функций не превышает 20%. Это имеет важное практическое значение для описания контуров сложных линий, поскольку результаты адиабатической теории универсальны, а полной неадиабатической — требуют отдельных расчетов для каждой линии. В целом адиабатическая теория уширения хорошо описывает контуры водородных линий в переходной области частот [28], см. также § 8.

Квантовый подход к расчету контуров линий, основанный на общем методе, предложенном впервые Борном (см. [65 гл. 22, § 9]) для расчета спектра тормозного излучения, развит в работах [66—70]. Суть метода сводится к тому, чтобы рассматривать излучения кванта не отдельно атомом, а всей взаимодействующей системой «атом + уширяющая частица» (для определенности — электрон). Такой общий подход позволяет выразить контур линии в терминах сечения излучения кванта при столкновении уширяющего электрона с атомом.

§ 7. Сравнение теории с экспериментом

Заключение

Здесь мы приведем некоторые экспериментальные данные, которые, с одной стороны, позволяют судить с точности современной теории уширения, а с другой — иллюстрируют ряд принципиальных положений физики уширения линий в плазме.

На рис. 5 представлен контур водородной линии H_{β} , измеренный Визе с сотр. [47] и рассчитанный теоретически [57, 58]. Видно, что расчеты в целом хорошо совпадают с экспериментом, за исключением центральной части контура линии. Последнее расхождение связано, по-видимому, с эффектами теплового движения ионов, не учитывающихся в расчетах. Полуширина линии определяется в основном статическим (хольцмарковским) уширением, вызываемым ионами плазмы. Роль электронов сказывается в том, что провал интенсивности в центре линии не слишком велик (в случае чисто статического уширения интенсивность в центре вообще обращается в нуль). Видно также, что контур линии несколько асимметричен.

Влияние электронов сказывается не только в центральной части линии, но и в далеких крыльях, не показанных на рис. 5. Эти крылья соответствуют статическому уширению как ионами, так и электронами. Статическое уширение электронами должно проявляться, согласно общим результатам теории, при $\Delta\omega \geq v_e^2/C_2 \equiv \Omega_{Be}$. Наблюдение этой области возможно либо в далеких крыльях линии (большие $\Delta\omega$), либо для высоковозбужденных уровней, у которых константа Штарка $C_2 \sim n^2$ достаточно велика (Ω_{Be} мало). Обе эти возможности были реализованы экспериментально. Далекие крылья линии L_{α} наблюдались Болдтом — Купером [71], Элтоном — Гримом [72] и Престоном [73]. Высоковозбужденные линии серии Бальмера (H_8-H_{15}) наблюдались Шлюттером и Авиллой [74, 75] и Химмелем [76]. Результаты экспериментов обоих типов удобно представить в виде параметра $R(\Delta\lambda)$, определяющего относительное число статически уширяющих частиц.

На рис. 6 представлены результаты экспериментов [71, 72] в крыле линии L_{α} вместе с теоретическими расчетами [28, 34]. Видно,

что по мере удаления в крыло линии все большая доля электронов начинает уширять статически. При $\Delta\lambda \sim 50 \text{ \AA}$ влияние почти всех частиц описывается статической теорией ($R \approx 2$).

В экспериментах Шлюттера [75] граница перехода к статиче-

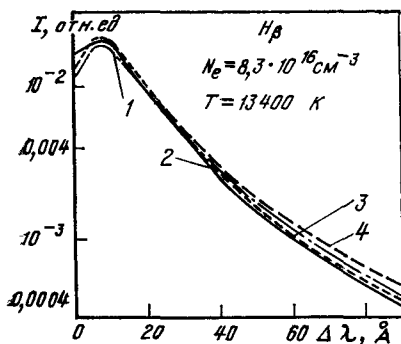


Рис. 5. Контур линии H_{β} :

1 — эксперимент («красное» крыло линии), 2 — «синее» крыло; 3 — расчеты [57]; 4 — расчеты [58]

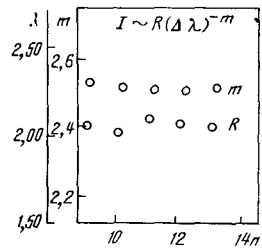
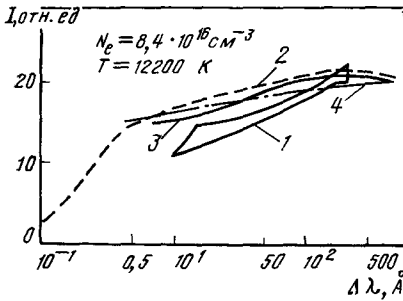


Рис. 6. Контур линии L_{α} в далеком крыле:
 1 — эксперимент [71]; 2 — расчеты [58];
 3 — расчеты [34]; 4 — адиабатическая модель [28]

Рис. 7. Относительное число R статически уширяющих частиц и показатель степени m , определяющие закон спада интенсивности в крыле линий для высших членов серии Бальмера [75]

скому уширению для электронов $\Delta\lambda_e$ хорошо описывалась формулой:

$$\Delta\lambda_e = \frac{0,62 \cdot 10^{12} v_e^2 \lambda}{n(n-1)} \quad (7.1)$$

Согласно статической теории уширения, распределение интенсивности в крыле линии должно иметь вид:

$$I(\Delta\lambda) \propto R(\Delta\lambda)^{-m},$$

где $R \approx 2$, а показатель степени $m = 5/2$.

На рис. 7 приведены наблюдаемые значения R и m в зависимости от главного квантового числа n верхнего уровня. Эти значения близки к предсказаниям теории.

На рис. 8 демонстрируется зависимость параметра $R(\Delta\lambda/\Delta\lambda_e)$ для линии H_{15} , измеренная экспериментально и рассчитанная теоретически. Согласие обоих значений вполне удовлетворительное.

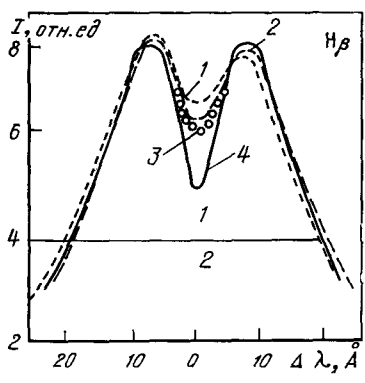
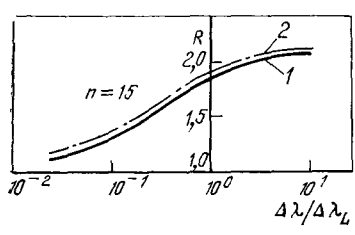


Рис. 8. Число $R(\Delta\lambda)$ для линии H_{15} :
 1 — эксперимент [75]; 2 — расчет [28]

Рис. 9. Эффект «приведенной массы» для линии H_{β} [47]:

1 — $\mu = 0,5$; 2 — $\mu = 1$; 3 — $\mu = 2$; 4 — теория [57]

В последние годы были экспериментально обнаружены (в первую очередь Визе с сотр. [47]) эффекты, связанные с тепловым движением ионов плазмы. На опыте наблюдается зависимость глубины провала в центре линии H_{β} от величины приведенной массы μ пары «излучающий атом — возмущающий ион» (рис. 9). Было исследовано уширение водорода (H) и дейтерия (D) ионами H^+ , D^+ , Ag^+ ($\mu_{HH} = 0,5$, $\mu_{HAg} \approx 1$, $\mu_{DAg} \approx 1,9$). Качественно зависимость глубины провала от μ , а также форма линии вблизи центра удовлетворительно описываются теорией тепловых поправок, развитой в § 4, см. [46]. Для линии с центральными компонентами (H_{α} , H_{γ}) также наблюдается эффект приведенной массы с уменьшением μ (увеличением интенсивности теплового движения): максимум интенсивности линии также уменьшается, а полуширина — увеличивается [47]. Детальное объяснение этого эффекта, основанное на учете эффектов теплового движения, описанных в § 4, можно найти в работе Грима [77].

Перейдем к обсуждению экспериментов в турбулентной плазме. Для случая низкочастотных ионно-звуковых колебаний измерения контуров спектральных линий в плазме с высоким уровнем шумов хорошо согласуются со статической теорией уширения, использующей сверку распределений Рэля и Хольцмарка, см. § 2, 4. При этом наблюдалось как аномальное увеличение (по сравнению с чисто хольцмарковским) ширины линии в полях турбулентных колебаний [62, 78], так и степенной закон спада интенсивности в крыле линий [79], характерный для такой свертки [80].

В серии экспериментов [22] была выявлена также анизотропия распределения НЧ-шумов. В основе измерений лежало использование поляризационной методики, описанной в § 4. Разностный контур линии (получаемый вычитанием наблюдаемых контуров с

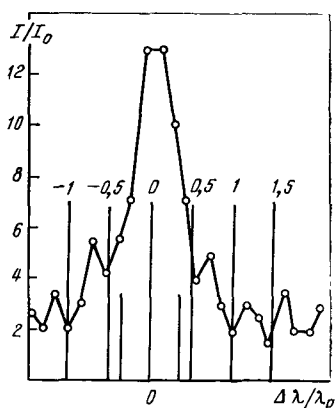
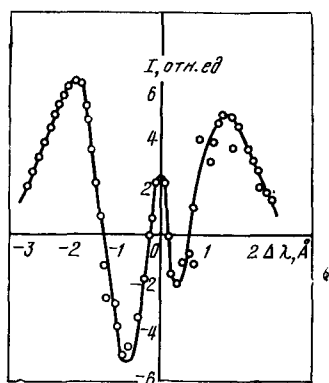


Рис. 10. Экспериментально наблюдаемый [22] разностный контур линии H_{α}

Рис. 11. Образование провалов на контуре линии D_{α} в плазме с ленгмювской турбулентностью [62]

различной поляризацией) хорошо соответствует предсказаниям теории (рис. 10).

В случае высокочастотной (ленгмюровской) турбулентности, помимо эффекта дополнительного уширения линий с сильными центральными компонентами [61, 62], на эксперименте наблюдались характерные «рельефы» на основном «теле» линии [61, 62]. Происхождение таких рельефов, приводящих к появлению многочисленных максимумов и минимумов интенсивности*, теория связывает, согласно § 5, с резонансами между частотой ВЧ-поля и частотами расщепления штарковских компонент в НЧ-полях. На рис. 11 приведены экспериментальный профиль D_α , полученный при сжатии Z-пинча [62] после второй особенности тока. В соответствии с ожидаемым нарастанием интенсивности турбулентных шумов при сжатии Z-пинча контур линии становится все более изрезанным. Вертикальные линии на рис. 11 обозначают положения провалов, вычисленных теоретически по формулам (5.18); цифры над этими линиями обозначают расстояния провалов от центра линии в единицах $\lambda_p = \omega_p \lambda_0^2 / 2\pi c$ (ω_p — плазменная частота). Видно, что теоретически вычисленные положения провалов хорошо совпадают с экспериментальными. Аналогичное согласие отмечалось и для других линий [62].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров. М.: Физматгиз, 1963.
2. Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
3. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979.
4. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980.
5. NBS Special Publication 336, 1972 (suppl. I—1973), (suppl. II—1975).
6. Holtmark J.—Ann. d. Phys., 1919, Bd 58, S. 577.
7. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
8. Норрег С. Г., Jr.—Phys. Rev., 1968, vol. 165, p. 215.
9. Кудрин Л. П. Статистическая физика плазмы. М.: Атомиздат, 1973.
10. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
11. Коган В. И., Селидовкин А. Д.—Beitr. Plasmaphysik, 1969, Bd 9, S. 199.
12. Лисица В. С.—Успехи физ. наук, 1977, т. 122, с. 449.
13. Коган В. И.—В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 4/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 258.
14. Hey J. D.—J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1976, vol. 16, p. 947.
15. Bohm D., Pines D.—Phys. Rev., 1951, vol. 82, p. 625; 1953. vol. 92, p. 609; 1953, vol. 92, p. 626.
16. Ecker G., Fischer K.—Z. Naturforsch., 1971, Bd 26a, S. 1360.
17. Ecker G., Müller K.—Z. Phys., 1958, Bd 153, S. 317.
18. Шолли Г. В.—Докл. АН СССР, 1970, т. 195, с. 589.

* С увеличением интенсивности шумов контур линии может стать настолько изрезанным, что затруднительно даже определить его полуширину [62].

19. Окс Е. А., Шолин Г. В. — Журн. техн. физ., 1976, т. 46, 254.
20. Шолин Г. В., Окс Е. А. — Докл. АН СССР, 1973, т. 209, с. 1318.
21. Завойский Е. К., Калинин Ю. Г., Скорюпин Е. А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 19.
22. Бабыкин М. В., Жужунашвили А. Н., Окс Е. А. и др. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 175.
23. Рыгов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
24. Раутян С. Г., Смирнов Г. И., Шалагин А. М. Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. Новосибирск: Наука, 1979.
25. Подгорецкий М. И., Степанов А. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1961, т. 40, с. 561.
26. Burgess D. D. — In: Lectures on XI Intern. Conf. Phen. Ionized Gases/Ed. Yanev, Belgrade, 1975.
27. Anderson P. W. — Phys. Rev., 1952, vol. 86, p. 809.
28. Коган В. И., Лисица В. С. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1972, vol. 12, p. 881.
29. Griem H. R., Varanger M., Kolb A. C., Oertel G. — Phys. Rev., 1962, vol. 125, p. 177.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
31. Демков Ю. Н., Монозон Б. С., Островский В. Н. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 57, с. 1431.
32. Демков Ю. Н., Островский В. Н., Соловьев Е. А. — Там же, 1974, т. 55, с. 126.
33. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
34. Лисица В. С., Шолин Г. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 9.
35. Green R. L., Coper J., Smith E. W. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1975, vol. 15, p. 1025.
36. Коган В. И. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, с. 1374.
37. Lewis M. — Phys. Rev., 1961, vol. 121, p. 501.
38. Underhill A. B., Waddell J. — Nat. Bur. Standards, Circ., 1959, N 603.
39. Griem H. — Astrophys. J., 1960, vol. 132, p. 883.
40. Завойский Е. К., Калинин Ю. Г., Скорюпин В. А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 19.
41. Шолин Г. В., Окс Е. А. — Докл. АН СССР, 1973, т. 200, с. 1318.
42. Паули В. Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1975, с. 99.
43. Holstein T. — Phys. Rev., 1950, vol. 79, p. 744.
44. Wimmel H. K. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1961, vol. 1, p. 1.
45. Шолин Г. В., Лисица В. С., Коган В. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970, т. 59, с. 1390.
46. Демура А. В., Лисица В. С., Шолин Г. В. — Там же, 1977, т. 73, с. 400.
47. Wiese W. L., Kelleher D. E., Helbig V. — Phys. Rev. A, 1975, vol. 11, p. 1854.
48. Wiese W. L., Kelleher D. E., Paquete D. R. — Ibid., 1972, vol. 6, p. 1132.
49. Шолин Г. В. — Оптика и спектроскопия, 1969, т. 26, с. 289.
50. Демура А. В., Шолин Г. В. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1975, vol. 15, p. 881.
51. Кудрин Л. П., Шолин Г. В. — Докл. АН СССР, 1962, т. 197, с. 342.
52. Stewart J. C. e. a. — Astrophys. J., 1973, vol. 179, p. 983.
53. Le Quang Rang, Voslamber D. — J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., 1975, vol. 8, p. 331.
54. Шолин Г. В., Демура А. В., Лисица В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 64, с. 2097.
55. Стрекалов М. Л., Бурштейн А. И. — Там же, 1971, т. 61, с. 101.
56. Pfennig H. — Z. Naturforsch., 1971, Bd 26a, S. 1071.
57. Kepple P., Griem H. R. — Phys. Rev., 1968, vol. 123, p. 317.
58. Vidal C. R., Cooper J., Smith E. W. — Astrophys. J., 1973, vol. 25, p. 37.
59. Окс Е. А., Шолин Г. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 975.
60. Зельдович Я. Б. — Успехи физ. наук, 1973, т. 110, с. 139.

61. Жужунашвили А. И., Окс Е. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 73, с. 2142.
62. Окс Е. А., Ранцев-Картинов В. А. — Там же, 1980, т. 79, с. 99.
63. Якимец В. В. — Там же, 1966, т. 51, с. 1469.
64. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1968.
65. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. Пер. с англ.: Мир, 1969.
66. Jablonski A. — Phys. Rev., 1945, vol. 68, p. 78.
67. Lisitsa V. S. — Acta Physica Polonica, 1978, vol. A55, p. 87.
68. Барышников Ф. Ф., Лисица В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 72, с. 1797.
69. Tran Minh N., Feautrier N., van Regemorter H. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1976, vol. 16, p. 849.
70. Барышников Ф. Ф., Лисица В. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1981, т. 80, с. 926.
71. Boldt G., Cooper W. B. — Z. Naturforsch., 1964, Bd 19a, S. 968.
72. Elton R. C., Griem H. R. — Phys. Rev., 1964, vol. 135, p. 1550.
73. Preston R. — J. Phys. B: Atomic and Mol. Phys., 1977, vol. B10, p. 523.
74. Schlüter H., Avic C. — Astrophys. J., 1966, vol. 144, p. 785.
75. Schlüter H. — J. Quant. Spectr. Rad. Transf., 1969, vol. 18, p. 140.
76. Himmel G. — Ibid., 1976, vol. 16, p. 529.
77. Griem H. R. — Phys. Rev., 1980, vol. A20, p. 1114.
78. Загородников С. П., Смолкин Ю. Е., Стригаиова Е. А., Шолин Г. В. — Докл. АН СССР, 1970, т. 195, с. 861.
79. Griem H. R., Kunze H. J. — Phys. Rev. Lett., 1959, vol. 14, p. 1261.
80. Sholin G. V. — Proceedings of the XV Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Invited Papers. Minsk, July 14—18, 1981, USSR, p. 341—357.

**ЭЛЕКТРОННЫЙ ЦИКЛОТРОННЫЙ НАГРЕВ ПЛАЗМЫ
В ТОКАМАКАХ***А. Д. Пилюя, В. И. Федоров*

Введение

В настоящее время общепринятой является точка зрения, что для достижения зажигания термоядерной реакции в токамаке необходимо использование дополнительного нагрева плазмы. Среди возможных методов дополнительного нагрева весьма перспективными считаются высокочастотные методы, основанные на вводе в плазму энергии в виде электромагнитных волн. ВЧ-нагрев возможен в различных диапазонах частот, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки [1—6].

В предлагаемой статье сделана попытка систематически осветить теоретические проблемы, возникающие в связи с исследованиями нагрева плазмы в токамаках в наиболее высокочастотном диапазоне, при частотах, близких к электронной циклотронной частоте. Применительно к крупным современным токамакам и токамакам следующего поколения речь идет о миллиметровом диапазоне длин волн.

С теоретической точки зрения картина возбуждения, распространения и поглощения волн при электронном циклотронном нагреве плазмы в токамаках может быть в своих главных чертах описана в рамках линейной электродинамики слабонеоднородной среды с пространственной дисперсией. Из нелинейных эффектов в условиях нагрева может оказаться существенным лишь искажение функции распределения электронов по скоростям. В то же время сложные и трудно контролируемые процессы параметрической турбулентности, по-видимому, не будут играть существенной роли.

Это обстоятельство позволяет надеяться, что разработанные к настоящему времени линейные и квазилинейные методы расчета эффективности поглощения волн, учитывающие реальный характер неоднородности плазмы и магнитного поля в токамаках, дают надежные результаты. Своеобразие таких расчетов связано с применением методов геометрической оптики для описания волновых явлений в неоднородных средах с сильной пространственной и временной дисперсией и с существенно неэрмитовым тензором электрической проницаемости. Обсуждение вопросов применимости геометрической оптики в таких условиях является одним из главных пунктов настоящей статьи.

§ 1. Электромагнитные волны в области частот электронного циклотронного резонанса

Прежде чем приступить к обсуждению влияния реального характера неоднородности на распространение волн, напомним вкратце основные сведения о характеристиках волн в модели однородной плазмы.

Нас интересует диапазон частот, близкий к электронной циклотронной частоте ω_B ($|\omega - \omega_B| \lesssim \omega_B$). Исключим, однако, из рассмотрения сначала непосредственную окрестность циклотронного резонанса, полагая $|\omega - \omega_B| \gg k_{\parallel} v_T$, где k_{\parallel} — проекция волнового вектора волны на направление магнитного поля \mathbf{B} , $v_T = \sqrt{2T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов. Если, кроме того, считать $\frac{k_{\perp} v_T}{\omega_B} \ll 1$, где k_{\perp} — компонента волнового вектора, перпендикулярная \mathbf{B} , то можно пренебречь пространственной дисперсией и описывать волны в приближении холодной плазмы. В декартовой системе координат с осью z , направленной вдоль \mathbf{B} , тензор электрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon, \quad \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = ig, \quad \epsilon_{zz} = \eta, \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где, в пренебрежении вкладом ионов,

$$\epsilon = 1 - q/(1 - u), \quad g = q\sqrt{u}/(1 - u), \quad \eta = 1 - q, \quad (2)$$

$$q = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_B^2}{\omega^2}, \quad \omega_{pe} \text{ — электронная плазменная частота.}$$

Наряду с проекциями электрического поля волны на оси декартовой системы координат E_{α} (где α пробегает значения x, y, z) удобно ввести «вращающиеся» компоненты поля $E_1 = E_x - iE_y$ и $E_2 = E_x + iE_y$ с направлением вращения в сторону электронов и ионов соответственно. В отличие от декартовых составляющих индекс у «вращающихся» компонент будет обозначаться латинскими буквами i или k ($i, k = 1, 2, 3$, причем $E_3 \equiv E_z$). По аналогии с E_i можно ввести вращающиеся компоненты вектора индукции D_i и тензор ϵ_{ik} , определяемый соотношением $D_i = \epsilon_{ik} E_k$.

Тензор ϵ_{ik} оказывается диагональным, с компонентами

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} \equiv \epsilon - g = 1 - \frac{q}{1 - \sqrt{u}}, \quad \epsilon_{22} \equiv \epsilon + g = 1 - \\ - \frac{q}{1 + \sqrt{u}}, \quad \epsilon_{33} \equiv \eta = 1 - q. \end{aligned} \quad (3)$$

Основные характеристики волн определяются, как известно, дисперсионным уравнением, которое в приближении холодной плазмы имеет вид [7]:

$$An^4 + Bn^2 + C = 0, \quad (4)$$

где $n = kc/\omega$ — показатель преломления волны; $A = \varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta$; $B = -\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \sin^2 \theta - \varepsilon \eta (1 + \cos^2 \theta)$; $C = \eta \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}$; θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B} .

Два решения дисперсионного уравнения $n^2_{1,2}(\theta)$ описывают две моды колебаний холодной анизотропной плазмы. Эти моды получили названия в соответствии со значением n^2 при $\theta = \pi/2$: волна с $n^2(\pi/2) = (\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon$ называется необыкновенной (мода x), а волна с $n^2(\pi/2) = \eta$ — обыкновенной (мода 0).

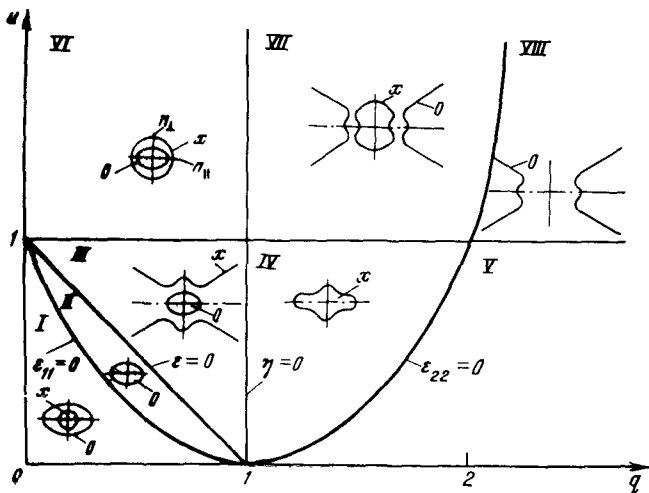


Рис. 1. Линии отсечек и резонансов на плоскости u, q

Коэффициенты дисперсионного уравнения, а следовательно, и его решения $n(\theta)$ зависят от параметров плазмы и частоты ω только через безразмерные величины u и q . Поэтому решения дисперсионного уравнения удобно рассматривать на плоскости u, q (рис. 1). Здесь же указаны линии, разделяющие области, внутри которых топологическая структура графиков $n_{0,x}(\theta)$ остается неизменной, но на границе которых она может изменяться*. Все эти линии являются выделенными для коэффициентов дисперсионного уравнения. На линии $\varepsilon_{11} = 0$ и $\varepsilon_{22} = 0$ обращается в нуль коэффициент C . Поэтому на этой линии показатель преломления одной из волн [а именно, необыкновенной, как это следует из приведенного выражения для $n(\pi/2)$] обращается в нуль независимо от угла θ , так что кривая $n_x(\theta)$ для этой волны стягивается в точку. Соответственно эта линия называется линией отсечки необыкновенной волны. Аналогично линия критической концентрации $q=1$, на которой $\eta=0$, является линией отсечки обыкновенной волны. Однако здесь исключение составляет угол $\theta=0$, когда η

* Обычно на плоскости u, q рассматриваются гораздо менее удобные графики фазовой скорости, т. е. $1/n(\theta)$ (так называемая диаграмма Клемова — Мэлэли—Аллиса).

оказывается общим множителем в (4), так что $n^2(0) \neq 0$ при $\eta=0$. Таким образом, на линии $q=1$ график $n_0(\theta)$ обыкновенной волны вырождается в отрезок оси z .

Линия $\varepsilon=0$, называемая линией гибридного резонанса (в данном случае — верхнего), отделяет область III, в которой ε и η имеют разные знаки и поэтому коэффициент A дисперсионного уравнения обращается в нуль при некотором резонансном значении θ_r угла θ :

$$\theta_r = \text{arctg} \sqrt{\frac{-\eta}{\varepsilon}} = \text{arctg} \sqrt{\frac{(1-u)(1-q)}{u+q-1}} :$$

Такая же ситуация имеет место в областях VI и VII. (Вторая ветвь кривой $\varepsilon=0$ — линия нижнего гибридного резонанса, ограничивающая эти области при больших u — лежит за пределами рассматриваемого диапазона параметров и на рис. 1 не указана.) Ясно, что при $\theta \rightarrow \theta_r$ показатель преломления одной из волн стремится к бесконечности*. В области III, это имеет место для необыкновенной волны, причем здесь $n^2_x(\theta) > 0$ в интервале углов $\theta_r \leq \theta \leq \pi/2$ и $n^2_x(\theta) < 0$ вне него, а в областях VII—VIII в бесконечность обращается показатель преломления обыкновенной волны, которая может распространяться ($n^2_0(\theta) > 0$), при $0 \leq \theta \leq \theta_r$.

Отметим, что в областях VII—VIII обыкновенная волна в интервале углов, близких к θ_r (где $n^2_0 \gg 1$), обычно называется косой ленгмюровской волной (в зарубежной литературе принято название мода Трайвелписа — Гулда), а в области малых углов — модой свистящих атмосфериков.

Рассмотрим теперь непосредственную окрестность циклотронного резонанса, по-прежнему, однако, не учитывая пока пространственную дисперсию. Как видно из формул (2), (3), при $u \rightarrow 1$ «резонансная» компонента ε_{11} тензора ε_{ik} имеет особенность. Поскольку ε_{11} входит линейно во все три коэффициента дисперсионного уравнения (4), оно принимает при $|u-1| \ll 1$ приближенную форму

$$\varepsilon_{11} \Lambda_0 = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } \Lambda_0 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta n^4 - \left[\varepsilon_{22} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \eta (1 + \cos^2 \theta) \right] n^2 + \eta \varepsilon_{22}.$$

Таким образом, при $\theta \neq 0$ показатели преломления обеих волн в приближении холодной плазмы остаются конечными при циклотронном резонансе. При $\theta=0$ показатель преломления одной из волн обращается при $u=1$ в бесконечность; эта особенность $n(\theta)$ является продолжением косого гибридного резонанса (так как $\theta_r=0$ при $u=1$). Мы можем, следовательно, заключить, что при $q < 1$ она имеет место для необыкновенной волны, а при $q > 1$ — для моды свистящих атмосфериков.

Качественно вид графиков $n(\theta)$ во всех областях указан на рис. 1.

* Это явление называется косым гибридным резонансом (при $\theta_r \neq \pi/2$).

Наряду с показателем преломления важнейшей характеристикой плоских волн является их поляризация. В общем случае обе волны поляризованы эллиптически. Интересные особенности возникают в окрестности циклотронного и косоого гибридного резонансов. Для их рассмотрения воспользуемся волновыми уравнениями [7]

$$D_{\alpha\beta}E_{\beta} = 0, \quad D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}k^2 - k_{\alpha}k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

определив из них отношение следующих компонентов поля:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{ig}{n^2 - \varepsilon}, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{n_{\perp}n_{\parallel}}{n_{\perp}^2 - \eta}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{n^2 - \varepsilon_{22}}{n^2 - \varepsilon_{11}}, \quad (7)$$

где $n_{\parallel} = n \cos \theta$; $n_{\perp} = n \sin \theta$; k_y считается равным нулю. При косоом гибридном резонансе (т. е. при $\theta \rightarrow \theta_r$ и $u \neq 1$) $n^2 \rightarrow \infty$ и мы получаем

$$E_y/E_x \rightarrow 0, \quad E_z/E_x \rightarrow k_z/k_x, \quad (8)$$

так что поляризация волны становится продольной и поле \mathbf{E} можно считать потенциальным ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$). Подобная ситуация имеет место, однако, только вдали от циклотронного резонанса, когда $\theta_r \neq 0$. При $u \rightarrow 1$ $\theta_r \rightarrow 0$, и мы находим из (6) и (7), что для той волны, которая имеет особенность показателя преломления, $E_2/E_1 \rightarrow 0$. Наличие компоненты E_1 , с которой резонансно взаимодействуют электроны, и является причиной особенности показателя преломления. Наоборот, при $\theta \neq 0$ и $u \rightarrow 1$ для обеих волн $E_1/E_2 \rightarrow 0$, так что в плоскости, перпендикулярной к внешнему магнитному полю, обе волны имеют одинаковую «нерезонансную» поляризацию и различаются относительной величиной продольной компоненты поля E_z . В частности, при $\theta = \pi/2$ E_z является единственной отличной от нуля компонентой поля обыкновенной волны.

Задача. Исследовать детально изменение формы графиков $n(\theta)$ при переходе через линию критической концентрации при $u > 1$ в области малых θ .

§ 2. Электронный циклотронный резонанс в однородной плазме при учете теплового движения электронов

Таким образом, в приближении холодной плазмы при косоом распространении ($\theta \neq 0$) показатели преломления обеих волн не имеют особенностей при циклотронном резонансе. Однако компонента ε_{11} тензора ε_{ih} обращается при этом в бесконечность. Учет пространственной дисперсии, естественно, устраняет эту бесконечность. При этом в отличие от холодной плазмы становится неполной экранировка резонансного компонента поля E_1 и, как следствие этого, возникает затухание волны. Как показывает анализ [5, 8], в условиях экспериментов по нагреву плазмы это затухание, как и вообще влияние теплового движения частиц на волну, оказывается слабым, и «холодное» приближение дает разумную оценку

показателя преломления $n \approx 1$. При этом $\frac{k_{\perp} v_T}{\omega_B} \sim \frac{k_{\parallel} v_T}{\omega} \sim \beta$, где $\beta = v_T/c \ll 1$, и можно представить известные выражения для ϵ_{ih} в виде разложения по этому малому параметру:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &\equiv \frac{1}{2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + i \epsilon_{xy} = 2i\sigma + 1 - 4i\alpha; \\ \epsilon_{22} &\equiv \frac{1}{2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) - i \epsilon_{xy} = 1 - \frac{q}{1 + \sqrt{u}}, \quad \epsilon_{33} = 1 - q + \epsilon'_{33}; \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} &= i\alpha, \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \epsilon_{13} = \epsilon_{xz}, \quad \epsilon_{32} = \epsilon_{23} = 0, \end{aligned} \right\} (9)$$

где

$$i\sigma = -\frac{qZ(\zeta)}{2\zeta\beta n \cos \theta} \sim \beta^{-1}, \quad \alpha = (\beta n \sin \theta)^2 \sigma, \quad \epsilon_{13} = q \operatorname{tg} \theta [1 - Z(\zeta)],$$

$$\epsilon'_{33} = \beta n \zeta \sin \theta \epsilon_{13}, \quad \zeta = \frac{\omega - \omega_B}{k_{\parallel} v_T} = \frac{\omega - \omega_B}{\omega \beta n \cos \theta},$$

$$Z(\zeta) = X(\zeta) - iY(\zeta), \quad X(\zeta) = 2\zeta e^{-\zeta^2} \int_0^{\zeta} e^{t^2} dt, \quad Y(\zeta) = \sqrt{\pi} \zeta e^{-\zeta^2}.$$

Дисперсионное уравнение в окрестности циклотронного резонанса также можно представить в виде разложения по β [8]. При этом удобно действовать следующим образом [9]. Волновое уравнение (6) в компонентах E_i переписывается в виде

$$n^2 E_i - \frac{1}{2} n_{\perp}^2 (E_1 + E_2) - \frac{1}{2} n_{\parallel} n_{\perp} E_3 - D_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$n_{\parallel} n_{\perp} (E_1 + E_2) + n_{\perp}^2 E_3 - D_3 = 0. \quad (11)$$

Из первого из них ($i=1$) определяем с нужной точностью резонансную компоненту поля E_1 :

$$E_1 = \frac{i}{2\sigma} \left[\frac{1}{2} n_{\perp}^2 E_2 + \left(\frac{1}{2} n_{\parallel} n_{\perp} + \epsilon_{31} \right) E_3 \right] \sim 0(\beta). \quad (12)$$

Подставляя это выражение в остальные два уравнения и вычисляя определитель получившейся системы двух уравнений для E_2 и E_3 , находим что его главный член совпадает с выражением Λ_0 в формуле (5). Член первого порядка по β в полученном таким образом дисперсионном уравнении можно упростить, используя уравнение $\Lambda_0 = 0$, справедливое в нулевом порядке по β . В результате с точностью до величин порядка β получаем [9]*:

$$\Lambda_0 + \frac{1}{i\sigma} \Lambda_1 + \frac{\omega - \omega_B}{\omega} \Lambda_2 = 0, \quad (13)$$

* Строго говоря, при получении (13) считается также $|\sigma| \gg 1$. Однако, поскольку в токамаках, как правило, $q \sim 1$, требование $\beta \ll 1$ при $n_{\parallel} \neq 0$ оказывается достаточным.

$$\text{где } \Lambda_1 = \frac{n_{\perp}^4}{4} \frac{(n^2 + 2q - 1)^2}{n_{\perp}^2 + q - 1}; \quad \Lambda_2 = n_{\perp}^4 \frac{\left(n^2 + \frac{3}{2}q - 1\right)}{n_{\perp}^2 + q - 1},$$

причем с рассматриваемой точностью в выражениях для Λ_0 , Λ_1 , Λ_2 следует положить $\omega = \omega_B$.

Таким образом, учет пространственной дисперсии приводит при $\beta \ll 1$ и $\left| \frac{\omega - \omega_B}{\omega} \right| \ll 1$ к появлению в дисперсионном уравнении малых комплексных поправок порядка β . Эти поправки описывают, в частности, затухание волн, которое, естественно, оказывается слабым (на расстояниях порядка длины волны).

Дисперсионное уравнение (13) можно решать методом последовательных приближений, полагая

$$n = n^{(0)} + n^{(1)} + i\kappa,$$

где $n^{(0)}$ — показатель преломления холодной плазмы [решение уравнения (5)], а $n^{(1)}$ и κ — малые величины порядка β . Для коэффициента поглощения κ таким образом получается [8]

$$\kappa = \Phi(\theta, q) f(\zeta) \beta, \quad (14)$$

где

$$f(\zeta) = \frac{\pi \zeta^2 e^{-\zeta^2}}{|Z(\zeta)|^2}; \quad \Phi = \Lambda_1 \frac{\partial \Lambda_0}{\partial n} \frac{2n \cos \theta}{q \sqrt{\pi}} \Big|_{\Lambda_0=0}. \quad (15)$$

Величина $\kappa(\theta)$ не является удобной характеристикой в задачах о ВЧ-нагреве, и поэтому мы не будем ее подробно анализировать. Для ориентировки на рис. 2 приведены графики функции $\Phi(\theta, q)$ для нескольких значений q . Видно, что затухание, имеющее одинаковый порядок по малому параметру β для обеих типов волн, сильно различается численно и имеет различную угловую зависимость.

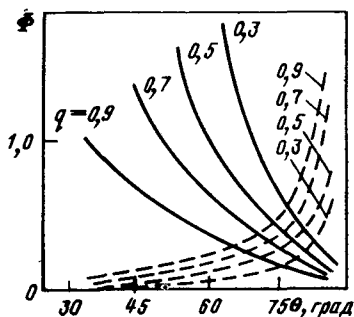


Рис. 2. Угловые зависимости коэффициента поглощения для необыкновенной (пунктир) и обыкновенной волн

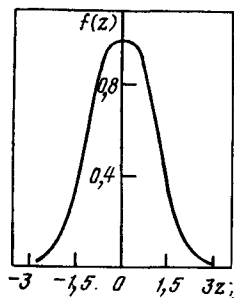


Рис. 3. Форма линии циклотронного поглощения

Затухание необыкновенной волны сильно возрастает при $\theta \rightarrow 0$, однако этот случай не может быть реализован в геометрии тока-мака, и мы его рассматривать не будем.

Контур линии циклотронного поглощения (рис. 3) симметричен относительно ω_B ; его ширина $\Delta\omega \sim \beta\omega_B$ определяется доплеровским уширением циклотронного резонанса.

Выражения (9)–(15) теряют силу в узком интервале углов θ , близких к $\frac{\pi}{2}$, $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \ll \beta$, когда доплеровский сдвиг становится настолько малым, что с ним начинает конкурировать релятивистское уширение резонанса, обусловленное зависимостью циклотронной частоты электрона от его энергии. Роль релятивистских эффектов можно увидеть уже при вычислении членов нулевого порядка по параметру $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$ в компонентах тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y$). Очевидно, эти компоненты выражаются через интеграл [13]

$$I = -i < \int_0^{\infty} \exp [i(\omega - \omega_B - k_{\parallel} v_z) t] dt \rangle, \quad (16)$$

где усреднение проводится по скоростям частицы, функцию распределения которых в приближении слабого релятивизма можно считать максвелловской. Если не учитывать релятивистскую зависимость ω_B от v^2 , то

$$I = \frac{1}{\omega - \omega_B} Z \left(\frac{\omega - \omega_B}{k_{\parallel} v_T} \right).$$

В слаборелятивистском приближении, при $\omega_B \rightarrow \omega_B \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right)$, вместо этого получаем

$$I = \frac{2}{\beta^2 \omega_B} \mathcal{F}_p \left(\frac{\delta}{\beta^2}, \frac{n_{\parallel}}{\beta} \right), \quad (17)$$

где $\delta = (\omega - \omega_B) / \omega_B$, $p = 3/2$,

$$\mathcal{F}_p = -i \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left[2i\delta\tau - \frac{n_{\parallel}^2 \tau^2}{(1-i\tau)} \right] \right\} (1-i\tau)^{-p} d\tau. \quad (18)$$

По своим аналитическим свойствам функция \mathcal{F}_p сильно отличается от функции Z , фигурирующей в нерелятивистском выражении для $\epsilon_{\alpha\beta}$. Прежде всего, она зависит не от одной, а от двух независимых переменных — δ/β^2 и n_{\parallel}/β . Далее, переписывая показатель экспоненты под интегралом в (18) в виде

$$i(2\delta - n_{\parallel}^2) \beta^{-2} \tau + \frac{i n_{\parallel}^2}{\beta^2} \frac{i\tau}{1-i\tau}$$

и поворачивая очевидным образом контур интегрирования в комплексной плоскости τ , легко убедиться, что при вещественных ω и n_{\parallel} функция $\mathcal{F}_p \equiv$

$\equiv \mathcal{F}_p \left(\zeta, \frac{n_{\parallel}^2}{\beta^2} \right)$ вещественна при $\zeta \equiv \frac{1}{\beta^2} (2\delta - n_{\parallel}^2) > 0$ и комплексна при $\zeta < 0$. Таким образом, эта функция, а с ней и компоненты тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$, рассматривае-

мые как функции переменной ζ , имеют точку ветвления при $\zeta=0$ (т. е. на линии $\omega-\omega_B=2\omega_B n_{\parallel}^2$ в плоскости ω, n_{\parallel}), которая исчезает в нерелятивистском пределе. Вещественность $\mathcal{F}_p(\zeta, n_{\parallel}^2/\beta^2)$ при $\zeta>0$ означает строгое отсутствие в этих условиях циклотронного затухания. Происхождение этой особенности релятивистской плазмы становится очевидным, если записать условие резонанса частицы, имеющей скорость v с волной $\omega-\omega_B-kv=0$, в виде

$$n_{\parallel} \frac{v \cos \alpha}{c} - \frac{v^2}{2c^2} = \delta,$$

где α — угол между \mathbf{v} и осью z . Максимальное значение левой части этого равенства, достигаемое при $\alpha=0, v/c=n$, равно $(1/2)n_{\parallel}^2$, так что при $2\delta > n_{\parallel}^2$ циклотронный резонанс между волной и частицей невозможен ни при какой скорости. Форма линии циклотронного поглощения при учете релятивизма, таким образом, несимметрична относительно циклотронной частоты ω_B . В частности, при $n_{\parallel}=0$ поглощение имеет место только при $\omega < \omega_B$.

Переход в (17) к нерелятивистскому пределу осуществляется при одновременном выполнении двух условий $n_{\parallel}^2 \gg \beta^2$ и $n_{\parallel}^2 \gg 2\delta$, когда основной вклад в интеграл вносит область малых τ . Первое из них упоминалось выше, смысл второго состоит в том, что частота не должна быть близкой к границе линии поглощения $\delta = n_{\parallel}^2/2$, само наличие которой является чисто релятивистским эффектом. Условие $2\delta \ll n_{\parallel}^2$ означает, несколько неожиданно, что даже при «нерелятивистских» углах распространения волны $|\theta-\pi/2| > \beta$ обычные выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ оказываются, строго говоря, неприменимыми вдали от резонанса. Следует, однако, иметь в виду, что это происходит в области частот, где пространственная дисперсия уже мало существенна, и, в частности, затухание экспоненциально мало.

Последовательный учет релятивистских поправок с необходимой для расчета затухания точностью приводит к очень громоздкому дисперсионному уравнению. Мы не будем его здесь выписывать (см. [10]), поскольку наиболее интересную в задачах о нагреве величину — полное затухание в циклотронном слое — удастся получить без использования его явного вида. Приведем здесь только для справочных целей выражения для компонент $\epsilon_{\alpha\beta}$ в простейшем случае $n_{\parallel}=0$ для окрестности резонанса на гармонике циклотронной частоты $|\omega - S\omega_B| \ll \omega_B, S=1, 2, 3, \dots$ [10]:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(c)} + \epsilon_{\alpha\beta}^{(w)}. \quad (19)$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\beta}^{(c)}$ — вклад в $\epsilon_{\alpha\beta}$ от нерезонансных слагаемых, рассчитанный для холодной плазмы,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx}^{(c)} = \epsilon_{yy}^{(c)} = \epsilon, \quad \epsilon_{zz}^{(c)} = \eta, \quad \epsilon_{xy}^{(c)} = -\epsilon_{yx}^{(c)} = ig \quad \text{при } S > 1; \\ 1 - \epsilon_{xx}^{(c)} = 1 - \epsilon_{yy}^{(c)} = i\epsilon_{xy}^{(c)} = -i\epsilon_{yx}^{(c)} = \frac{q}{2(1 + \sqrt{u})}, \quad \epsilon_{zz}^{(c)} = \eta \quad \text{при } S = 1. \end{aligned} \right\} (20)$$

Дисперсионная добавка $\epsilon_{\alpha\beta}^{(w)}$ в низшем порядке по $\lambda = \frac{k_{\perp}^2 T_e}{m_e \omega_B^2}$ определяется

формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(\omega)} = \varepsilon_{yy}^{(\omega)} = i\varepsilon_{xy}^{(\omega)} = -i\varepsilon_{yx}^{(\omega)} &= -\frac{qS^2}{\beta^2 2^{s-1} S!} \lambda^{s-1} F_{s+\frac{3}{2}}(\zeta), \\ \varepsilon_{zz}^{(\omega)} &= -\frac{q\lambda^s}{\beta^2 2^{s-1} S!} F_{s+\frac{5}{2}}(\zeta), \end{aligned} \quad (21)$$

где $F_{s+\frac{1}{2}}(\zeta) \approx \mathcal{F}_{s+\frac{1}{2}}(\zeta, 0)$, $\zeta = \frac{2\delta}{\beta^2}$. Функция Γ_p связана с плазменной

дисперсионной функцией соотношением

$$F_p(\zeta) = \sum_{l=0}^{p-3/2} (-\zeta)^l \frac{\Gamma(p-1-l)}{\Gamma(p)} - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} (-\zeta)^{p-\frac{3}{2}} Z(i\zeta^{1/2}). \quad (22)$$

Остальные компоненты тензора (ε_{xz} , ε_{zx} , ε_{yz} , ε_{zy}) при $n_{\parallel} = 0$ равны нулю.

Задача. Вычислить затухание обыкновенной волны при перпендикулярном распространении в низшем порядке по β вблизи S -й гармоники циклотронной частоты ($S \geq 1$).

Решение. Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны имеет при $n_{\parallel} = 0$ вид

$$n^2 = \varepsilon_{zz}.$$

Используя (21), (22) и свойства $Z(\zeta)$, находим

$$n = \frac{4\pi s^2 q}{\Gamma\left(s + \frac{3}{2}\right) 2^s S!} \frac{\lambda_0^{s+1}}{\beta^2} \left| \frac{2\delta}{\beta^2} \right|^{s + \frac{1}{2}} e^{-\left| \frac{2\delta}{\beta^2} \right|},$$

где $\lambda_0 = (1-q)S^2\beta^2$, $\delta < 0$. Полученный результат пригоден и в случае $S=1$, однако лишь для плазмы с малой концентрацией.

§ 3. Вектор Пойтинга и поглощение энергии при циклотронном резонансе

Как видно из формулы (9), антиэрмитова часть тензора ε_{ik} в окрестности циклотронного резонанса (при $|\zeta| \leq 1$) имеет тот же порядок величины, что и эрмитова часть. Слабость затухания при этом объясняется особенностью поляризации волн — малостью резонансной компоненты поля E_1 . В этих условиях необходимо проявлять осторожность при использовании таких понятий, как плотность энергии, поток энергии волны, групповая скорость, поскольку вывод уравнения переноса энергии волн, связывающего эти величины, существенным образом основан на предположении о малости антиэрмитовой части тензора электрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (см., например, [7]). Чтобы выяснить, к чему приводит отказ от этого последнего предположения (но, конечно, при слабом затухании волн), рассмотрим теорему Пойтинга в той форме, которая непосредственно следует из уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{B}] + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0, \quad (23)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ — физические (вещественные) значения электрического и магнитного поля волны; $\tilde{\mathbf{j}}$ — плотность вызываемого волной тока. В среде с пространственной дисперсией связь поля и тока нелокальна:

$$\tilde{\mathbf{j}}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \tilde{E}_{\beta}(\mathbf{r}', t'), \quad (24)$$

причем тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ связан с ядром $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ соотношением

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}),$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \sigma_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{R}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\mathbf{R}).$$

Рассмотрим теперь задачу о затухании квазимонохроматической волны вида

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t] \},$$

считая ω и \mathbf{k} вещественным. При слабом затухании амплитуду $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ можно считать медленно меняющейся функцией и представить ее под интегралом в (24) в виде разложения по степеням $(t - t')$ и $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Тогда после интегрирования по частям формула (24) приобретает вид [7]

$$i_{\alpha} = \text{Re} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \left\{ \sigma_{\alpha\beta} E_{\beta} - i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial \mathbf{r}} + i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial t} + \dots \right\}, \quad (25)$$

где отброшены члены с высшими производными от плавной функции $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ по координате и времени. Подставляя это выражение в формулу (23), получаем после усреднения по времени следующее соотношение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S} + Q = Q', \quad (26)$$

где величины

$$W = \frac{\partial(\omega \epsilon'_{\alpha\beta})}{\partial \omega} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^+}{16\pi}, \quad (26a)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}^*] - \omega \frac{\partial \epsilon'_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi}, \quad (26b)$$

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \epsilon''_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta} \quad (26b)$$

интерпретируются обычно как плотность энергии, плотность потока энергии волны и плотность диссипируемой энергии в плазме соответственно, $\epsilon'_{\alpha\beta}$ — эрмитова, а $i\epsilon''_{\alpha\beta}$ — антиэрмитова части тензора проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$,

$$2iQ' = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\omega \epsilon''_{\alpha\beta})}{\partial\omega} \left(E_{\alpha}^* \frac{\partial E_{\beta}}{\partial t} - E_{\beta} \frac{\partial E_{\alpha}^*}{\partial t} \right) - \frac{\omega}{8\pi} \frac{\partial \epsilon''_{\alpha\beta}}{\partial k} \left(E_{\alpha}^* \frac{\partial E_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial E_{\alpha}^*}{\partial r} E_{\beta} \right). \quad (26r)$$

При $|\epsilon''_{\alpha\beta}| \ll |\epsilon'_{\alpha\beta}|$ величиной Q' следует, конечно, пренебречь, и мы получаем теорему Пойнтинга для сред с пространственной дисперсией в стандартном виде. Если теперь попытаться применить уравнение (26) в окрестности циклотронного резонанса, то возникает следующая трудность. Компоненты тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ в этом случае зависят от частоты, в частности, и через аргумент $\zeta = (\omega - \omega_B) / \omega n_{\parallel} \beta$ дисперсионной функции $Z(\zeta)$. Вещественная и мнимая части этой функции и их производные по аргументу при $\zeta \sim 1$ являются величинами порядка единицы; в то же время $\frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = \frac{1}{\omega_B n_{\parallel} \beta}$, так что $\frac{\partial^n \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega^n} \sim \frac{n}{(\beta \omega_B n_{\parallel})^n}$. Декремент затуха-

ния в окрестности циклотронного резонанса можно грубо оценить как $\gamma \sim \beta \omega_B$. Таким образом, в разложении (25) исчезает малый параметр при производных по времени и теперь нет оснований ограничиваться первыми членами разложения. Соответственно теряют смысл и обычные выражения для плотности энергии квазимонохроматической волны и ее групповой скорости $v_g = \partial\omega / \partial k$. Этим и объясняется то обстоятельство, что при формальном вычислении групповой скорости для нее могут получиться значения, превышающие скорость света [11, 12].

Таким образом, рассмотрение затухания квазимонохроматических колебаний плазмы во времени наталкивается при $\omega \rightarrow \omega_B$ на принципиальные трудности. Однако при исследованиях по нагреву плазмы наибольший интерес представляет задача о распространении и пространственном затухании волны с заданной внешней генератором частотой. В такой стационарной постановке эта задача оказывается заметно более простой, поскольку при дифференцировании $Z(\zeta)$ по k_{\parallel} больших множителей при $k_{\parallel} \neq 0$ не возникает. Тем не менее уравнение (26) пока еще не может быть использовано непосредственно для расчета $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, поскольку еще не установлено соотношение между различными составляющими поля квазимонохроматической волны (точнее — пучка волн с фиксированной частотой). Конечно, в случае однородной плазмы никакой проблемы здесь не возникает. По существу, вся необходимая информация может быть получена непосредственно из уравнений (6) с использованием разложения Фурье. Однако рассмотрение этой задачи представляет определенный методический интерес с точки зрения обобщения уравнения (26) на случай слабонеоднородной среды. Поэтому рассмотрим проблему стационарного переноса энергии пучка слабозатухающих волн в плазме с немалой антиэрмитовой частью тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ более подробно.

Уравнения (6) для волны с плавно меняющейся амплитудой можно по аналогии с формулой (25) представить в виде

$$D_{\alpha\beta}E_{\beta} - i \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Амплитуду волны $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})$ естественно представить в виде разложения

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \dots,$$

где предполагается, что $|E^{(n+1)}| \sim \frac{1}{kL} |E^{(n)}| \ll |E^{(n)}|$, L — характерный масштаб изменения амплитуды. Обычно $iD'_{\alpha\beta}$ (антиэрмитова часть тензора $D_{\alpha\beta}$) считается при слабом затухании величиной первого порядка малости, так что для амплитуд поля в нулевом приближении получается система уравнений [7]

$$D'_{\alpha\beta}E_{\beta}^{(0)} = 0,$$

где $D'_{\alpha\beta}$ — эрмитова часть тензора $D_{\alpha\beta}$.

Однако в нашем случае при $|D'_{\alpha\beta}| \sim |D'_{\alpha\beta}|$ следует поступить по-другому. Удобно ввести новый тензор $\tilde{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} + \delta D_{\alpha\beta}$ с $\delta D_{\alpha\beta} \sim O\left(\frac{1}{kL}\right)$ таким образом, чтобы дисперсионное уравнение

$$\det |\tilde{D}_{\alpha\beta}| = 0 \quad (27)$$

давало решения с вещественными \mathbf{k} , близкими по величине к вещественной части соответствующих решений точного дисперсионного уравнения $\det |D_{\alpha\beta}| = 0$. В этом случае для амплитуд поля в нулевом приближении можно выбрать следующую систему уравнений:

$$D_{\alpha\beta}E_{\beta}^{(0)} = 0. \quad (28)$$

В первом приближении по $1/kL$ мы получаем

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}E_{\beta}^{(1)} - \delta D_{\alpha\beta}E_{\beta}^{(0)} - i \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E_{\beta}^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (29)$$

Очевидно, что $\delta D_{\alpha\beta} = \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} [\mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}]$, где $\mathbf{k}(\omega)$ — решение точного дисперсионного уравнения $\det |D_{\alpha\beta}| = 0$, \mathbf{k} — решение уравнения (27). Произвол в выборе $\delta D_{\alpha\beta}$ связан, таким образом, с возможностью включения части фазы волны в комплексную амплитуду $E_r^{(0)}$.

Умножая уравнение (29) на $E_{\alpha}^{(0)*}$ и отделяя затем вещественную и мнимую части, получаем после несложных преобразований с использованием системы (28) два следующих уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_0 + Q_0 = Q_1 + Q'_0; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial D'_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \left(E_{\alpha}^{(0)*} \frac{\partial E_{\beta}^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial E_{\alpha}^{(0)*}}{\partial \mathbf{r}} E_{\beta}^{(0)} \right) - i E_{\alpha}^{(0)*} \delta D'_{\alpha\beta} E_{\beta}^{(0)} = \\ = - \frac{i}{2} \frac{\partial D'_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(E_{\alpha}^{(0)*} E_{\beta}^{(0)} \right) + Q'_1, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{где } 2\mathbf{S}_0 = \frac{c^2}{8\pi\omega} E_{\alpha}^{(0)*} E_{\beta}^{(0)} \frac{\partial D'_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}}, \quad Q_0 = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^* E_{\alpha}^{(0)*} E_{\beta}^{(0)};$$

$$- Q_1 = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^* (E_{\alpha}^{(0)*} E_{\beta}^{(1)} + E_{\alpha}^{(1)*} E_{\beta}^{(0)}),$$

$$Q'_0 = +\omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^*}{\partial \mathbf{k}} \left(E_{\alpha}^{(0)*} \frac{\partial E_{\beta}^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial E_{\alpha}^{(0)*}}{\partial \mathbf{r}} E_{\beta}^{(0)} \right) \frac{i}{16\pi}$$

$$Q'_1 = + D'_{\alpha\beta} (E_{\alpha}^{(0)*} E_{\beta}^{(1)} - E_{\alpha}^{(1)*} E_{\beta}^{(0)}).$$

Легко видеть, что уравнение (30) является стационарным вариантом уравнения (26), в котором амплитуда волны $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ представлена в виде суммы двух членов нулевого и первого порядков по параметру $1/kL$. Плотность диссипируемой в плазме энергии представляется при этом также суммой двух слагаемых Q_0 и Q_1 , и хотя мы считаем $|E_1^{(1)}| \ll |E_1^{(0)}|$, пренебрегать величиной Q_1 по сравнению с Q_0 при $|\varepsilon_{\alpha\beta}^*| \sim |\varepsilon_{\alpha\beta}^*|$, вообще говоря, нет оснований.

Уравнение (31) определяет комплексную фазу амплитуды $E^{(0)}(\mathbf{r})$ или, другими словами, поправку первого порядка к волновому вектору.

Воспользуемся теперь формулами (9) для оценки величин Q_1 , Q'_0 и Q'_1 в окрестности циклотронного резонанса в рамках использованного в § 2 приближения слабой поперечной пространственной дисперсии и слабого релятивизма $\beta \ll 1$. Из уравнений (28) видно, что $E_1^0 \sim O(\beta)$, поскольку $\varepsilon_{\parallel} \sim 1/\beta$.

Как уже отмечалось, малость E_1 как раз и обеспечивает слабость поглощения волн (малость Q_0). Легко видеть из уравнений (29), что аналогичным образом оказывается аномально малой и величина

$$|E_1^{(1)}| \sim \beta \left(|E_z^{(1)}| + |E_2^{(1)}| + \frac{1}{kL} |E^{(0)}| \right),$$

так что $Q'_1 \sim \frac{1}{kL} Q_0 \ll Q_0$. Следовательно, слагаемое с Q_1 может быть опущено из (30). Далее можно отметить, что

$$\begin{aligned} |Q'_0| \sim \left| \omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^*}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E^{(0)*} E_{\beta}^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} \right| \sim \\ \sim \left| \omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^*}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E^{(0)*} E^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} \right| \beta \approx \beta \operatorname{div} [\mathbf{E}^{(0)} \mathbf{B}^{(0)*}]. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что в низшем порядке по β поток энергии в волне целиком определяется потоком электромагнитной энергии, а переносом энергии частицами плазмы можно пренебречь. В результате получается теорема Пойнтинга в следующей привычной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_0 + Q_0 = 0, \quad (32)$$

где $\mathbf{S}_0 = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}^{(0)} \mathbf{B}^{(0)*}]$ — поток энергии в волне, совпадающий в низшем порядке по β с локальным значением потока энергии в приближении холодной плазмы. Выражение для Q_0 можно при этом представить в виде

$$Q_0 = \frac{\omega}{8\pi} \left\{ \frac{\varepsilon_{11}''}{2} |E_1^{(0)}|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz}'' \operatorname{Re}(E_1^{(0)} E_z^{(0)}) + \varepsilon_{33}'' |E_z^{(0)}|^2 \right\},$$

где, как и в формуле (12),

$$E_1^{(0)} = \frac{-1}{\varepsilon_{11}} \left[\frac{n_{\perp}^2}{2} E_2^{(0)} + (n_{\parallel} n_{\perp} + 2\varepsilon_{xz}) E_z^{(0)} \right],$$

ось x направлена вдоль \mathbf{k}_{\perp} .

Поскольку приближение холодной плазмы в нулевом порядке по β правильно описывает компоненты $E_2^{(0)}$ и $E_z^{(0)}$, а $E_1^{(0)} \sim \beta$, можно сформулировать простое правило для расчета затухания пучка волн. Вначале, в приближении холодной плазмы, рассчитывается распределение поля пучка волн. При этом поле будет, естественно, локализовано в пространстве вокруг луча, направление которого будет совпадать с направлением групповой скорости, рассчитанной в приближении холодной плазмы.

Затем рассчитывается затухание волны вдоль пучка. При этом можно либо использовать формулу (32), в которую следует подставить $E_2^{(0)}$ и $E_z^{(0)}$ из приближения холодной плазмы, либо интегрировать вдоль луча мнимую часть волнового вектора, определяемую с точностью до величин порядка β из дисперсионного уравнения (13). Уравнение (31) при этом определяет изменение фазы комплексной амплитуды $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ вдоль луча. Причем с рассматриваемой точностью в нем можно положить правую часть равной нулю.

Сформулированное правило расчета, как будет показано ниже, почти без изменений может быть перенесено в рамках приближения геометрической оптики на случай неоднородной плазмы.

В заключение этого параграфа обсудим границы применимости полученных здесь результатов. При рассмотрении пучков волны мы существенным образом использовали формулу (32), применимость которой обусловлена возможностью дифференцирования $\varepsilon_{\alpha\beta}$ по k для всего спектра волновых векторов данного пучка. Оказывается, что это требование накладывает определенные ограниче-

ния на величину k_{\parallel} и характерного масштаба неоднородности амплитуды рассматриваемой волны вдоль постоянного магнитного поля (L_{\parallel}).

Дело в том, что $\epsilon_{\alpha\beta}^r$ является, как известно, неаналитической функцией k_{\parallel} (содержит $|k_{\parallel}|$), так что $\frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}^r}{\partial k_{\parallel}}$ при $k_{\parallel} = 0$ теряет смысл. Поэтому необходимо, чтобы фурье-компоненты с малым значением $|k_{\parallel}|$ присутствовали в спектре волны с малым весом. При невыполнении этого требования пространственная локализация тока, вызываемого в плазме пучком волн, будет существенно отличаться от локализации электрического поля.

Следовательно, для применимости в окрестности циклотронного резонанса приближения (25), соответствующего учету слабой нелокальности с помощью пространственных производных амплитуды, необходимо потребовать выполнения условий (см. задачу в конце этого параграфа)

$$k_{\parallel} L \gg 1, \quad k_{\parallel}^2 L_{\parallel}^2 \gg \left(\frac{\omega - \omega_B}{k_{\parallel} v_T} \right)^2. \quad (33)$$

Задача. В пренебрежении поперечной пространственной дисперсией вычислить ток, вызываемый в плазме «резонансным» компонентом электрического поля вида

$$\tilde{E}_1(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} E(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ikz - \alpha(k - k_z)^2] dk.$$

Решение. Используя представление плазменной дисперсионной функции вида

$$\frac{1}{\omega - \omega_B} Z\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z v_T}\right) = -i \int_0^{\infty} \exp\left[i(\omega - \omega_B)t - \frac{1}{4}k_z^2 v_T^2 t^2\right] dt,$$

находим после интегрирования по k :

$$-4\pi \tilde{j}_1 = qE(\mathbf{r}_{\perp}) \int_0^{\infty} \exp\left[i(\omega - \omega_B)t + \frac{\left(\alpha k_z - \frac{iz}{2}\right)^2}{\alpha + \frac{v_T^2 t^2}{4}} - \alpha k_z^2\right] \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{v_T^2 t^2}{4\alpha}}}.$$

Рассмотрим область $|z| \ll 2\alpha k_z$. Основной вклад в интеграл дает начало пути интегрирования и окрестность одной из перевальных точек. При выполнении условий (33) с $L_{\parallel}^2 = 4\alpha$ вкладом от перевальной точки при $z^2/4\alpha \ll 1$ можно пренебречь с точностью до величин порядка $\exp[-\alpha k_z^2]$, и мы получаем при $\omega \neq \omega_B$ $\tilde{j}_1 = \sigma_{11}(k_z) \tilde{E}_1$. Это выражение соответствует главному члену в формуле (25), так что связь между током и полем внутри пакета носит локальный

характер. При этом второе из условий (44) необходимо для того, чтобы во всем интервале t , определяющем $Z \left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z v_T} \right)$, можно было считать $v_T^2 t^2 / 4\alpha \ll \ll 1$.

Легко убедиться, что при $|Z| \gg \alpha k_z$ основной вклад в исходный интеграл будет давать перевальная точка. При этом $j_1 \sim e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{z^2 (\omega - \omega_B)^2}{4v_T^2} \right]^{1/2}}$ убывает с ростом z значительно медленнее, чем поле $E_1 \sim e^{-z^2/4\alpha}$, и формула (25) становится неприменимой. Однако ток при $\alpha k_z^2 \gg 1$ в области $z^2 > \alpha^2 k_z^2$ экспоненциально мал, так что этим током можно пренебречь.

§ 4. Доступность резонансов в токамаке

В § 2 было показано, что циклотронное затухание волн является существенным только в узком интервале частот $\left| \frac{\omega - \omega_B}{\omega} \right| \leq \beta$.

При нагреве плазмы в токамаке частота ω фиксирована, а ω_B является функцией расстояния до оси симметрии тора. Поэтому поглощение энергии происходит в узком слое толщиной порядка $\beta R_0 \ll a$ вокруг поверхности циклотронного резонанса $\omega = \omega_B(\mathbf{r})$ (здесь R_0 и a соответственно большой и малый радиусы токамака). Для достижения высокой эффективности нагрева плазмы желательно, чтобы область поглощения энергии волн находилась в центральной части шнура. В связи с этим особое значение приобретает проблема доступности резонансной области для волн, возбуждаемых на периферии плазменного шнура. Самое общее представление о доступности можно получить, просто изобразив расположение описанных в § 1 областей параметров q , и в малом сечении плазмы (рис. 4). Ясно, что для необыкновенной волны, запускаемой с внешней стороны тора, область циклотронного резонан-

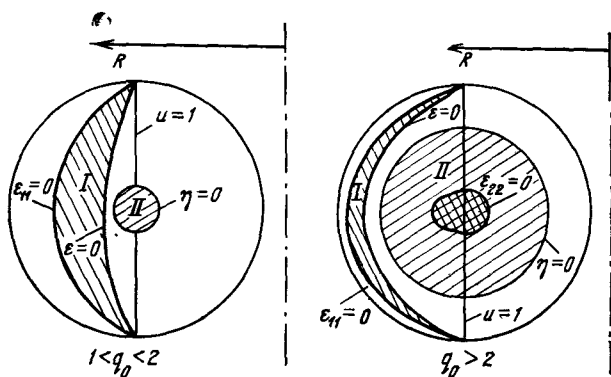


Рис. 4. Плоскость u, q в токамаке:

I — область непрозрачности моды x ; II — область непрозрачности моды 0

са недоступна; для волны, запускаемой с внутренней стороны (т. е. со стороны сильного магнитного поля) во всяком случае недоступна область плазмы с концентрацией, в 2 раза превышающей критическую ($q > 2$). Для обыкновенной волны недоступна область $q > 1$. Область $q > 1$ является прозрачной для моды атмосфериков — косоу ленгмюровской волны. Однако при типичных параметрах токамака эту волну невозможно возбудить антенной, расположенной вне плазмы из-за наличия обширной области непрозрачности при малых концентрациях.

Описанная картина доступности является, конечно, очень грубой и в качестве следующего шага разумно рассмотреть распространение волны в экваториальной плоскости токамака в модели плоскослойной среды. Пренебрежем пока тепловым движением электронов и полоидальной компонентой магнитного поля. Будем считать, что плазма, параметры которой зависят от одной декартовой координаты x , занимает область $-a \leq x \leq a$, причем профиль $q(x)$ имеет максимум в середине этого интервала, а $u(x)$ монотонно убывает с ростом x . Считая плазму слабонеоднородной ($\omega a/c \gg 1$), воспользуемся для решения волнового уравнения квазиклассическим приближением, полагая

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x) \exp \left\{ i \int k_x(x') dx' + ik_z z - i \omega t \right\}, \quad (34)$$

где $\mathbf{E}(x)$ и $k_x(x)$ — медленно меняющиеся функции, а k_z — постоянная (ось z направлена вдоль магнитного поля). Имея в виду распространение волны в экваториальной плоскости, мы положили $k_y = 0$. Безразмерные компоненты волнового вектора $n_{\perp} = k_x c / \omega$ и $n_{\parallel} = k_z c / \omega$ в каждой точке плазмы связаны уравнением, совпадающим по форме с дисперсионным уравнением холодной плазмы (4), коэффициенты которого определяются локальными значениями параметров $q(x)$ и $u(x)$. В этом уравнении, однако, теперь следует считать заданной величину $n_{\perp} = n \sin \theta$, а величину $n_{\parallel} = n \cos \theta$ рассматривать как неизвестную. Уравнение (4), соответственно, удобно переписать в виде

$$\tilde{A} n_{\perp}^4 + \tilde{B} n_{\perp}^2 + \tilde{C} = 0, \quad (35)$$

где $\tilde{A} = \epsilon$, $\tilde{B} = (\epsilon + \eta) n_{\parallel}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{22} - \epsilon \eta$, $\tilde{C} = \eta (\epsilon_{11} - n_{\parallel}^2) (\epsilon_{22} - n_{\parallel}^2)$.

Распространение волн в рассматриваемой плоской модели описывается дисперсионными кривыми $n_{\perp}(x, n_{\parallel})$ при $n_{\parallel} = \text{const}$. Качественно характер этих кривых легко понять с помощью графиков функций $n(\theta)$, поскольку n_{\perp} определяется пересечением прямой $n_{\parallel} = \text{const}$ с графиком $n(\theta)$. Отметим сразу, что, как это видно из формы кривых $n(\theta)$ (см. рис. 1), два корня уравнения (35) $n_{\perp 1/2}^2$ могут относиться как к разным модам, так и к одной и той же волне. Отсечки волн с фиксированным n_{\parallel} (т. е. обращение в нуль n_{\perp}^2) возможны на линиях $\eta = 0$, $\epsilon_{11} = n_{\parallel}^2$ и $\epsilon_{22} = n_{\parallel}^2$, т. е. при значениях q , определяемых соотношениями

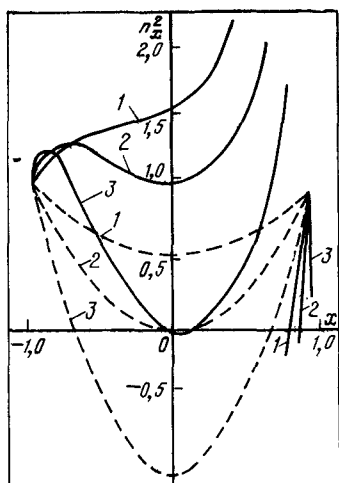


Рис. 5. Дисперсионные кривые $n_{\perp}^2(x)$ при $n_{\parallel}^2=0, 1$:

пунктир — обыкновенная волна, сплошная линия — необыкновенная волна. Разные кривые соответствуют: 1 — $q_0=0,5$; 2 — $q_0=1,0$; 3 — $q_0=2,0$

$$q = 1, \quad q = (1 + \sqrt{u})(1 - n_{\parallel}^2),$$

$$q = (1 - \sqrt{u})(1 - n_{\parallel}^2). \quad (36)$$

Таким образом, с ростом n_{\parallel}^2 область распространения волн, вообще говоря, уменьшается; разграничительные линии на рис. 1 $\epsilon_{11}=0, \epsilon_{22}=0, q=1$, определенные из условия $n_{\parallel}^2 + n_{\perp}^2 = 0$, совпадают с линиями отсечки $n^2=0$ только при перпендикулярном распространении.

На рис. 5—7 приведены примеры кривых $n_{\perp}^2(x, n_{\parallel})$ при $q(x) = q_0(1 - x^2/a^2)$ и $u=1$ в точке $x=0$. При расчете этих кривых было учтено, что в аксиально-симметричной конфигурации, к которой относится токамак, $n_{\parallel}(x) = n_{\parallel 0} \left(1 - \frac{a+x}{R_0}\right)$, где $n_{\parallel 0}$ — начальное

значение n_{\parallel} , задаваемое на внутреннем краю плазмы. Торoidalную зависимость n_{\parallel} от x можно, конечно, учесть и в формулах (35).

На рис. 5—7 хорошо видно, как ухудшаются условия доступности с ростом q_0 и $n_{\parallel 0}$. На рис. 7 представлена упоминавшаяся выше ситуация, когда две ветви графика n_{\perp}^2 относятся к одной (необыкновенной) моде. Групповые скорости этих волн вдоль оси x при одинаковом знаке n_{\perp} направлены в противоположные сторо-

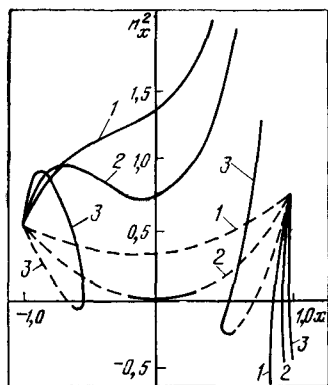


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, при $n_{\parallel}^2=7$

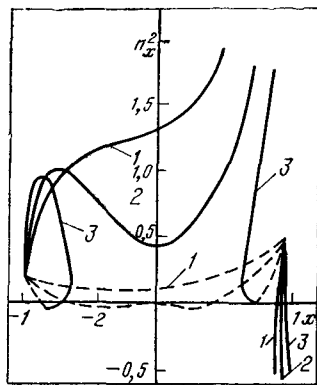


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, при $n_{\parallel}^2=0,9$

Рис. 8. Доступность циклотронного резонанса в токамаке.

Области существования волн при $\omega = \omega_B$ помечены знаками 0, x в скобках

ны. В точке, где значения n_{\perp} для этих волн совпадают, происходит их линейная трансформация [15—18]. Как видно из рис. 7, именно положение точки трансформации, а не точки отсечки определяет в данном случае максимальное значение q , доступное волне. Условие доступности циклотронного резонанса для волны, распространяющейся слева (со стороны сильного магнитного поля), состоит в том, что точка трансформации, определяемая условием

$$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = 0, \quad (37)$$

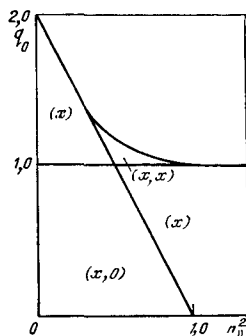
не должна находиться в области $u(x) > 1$. Подставляя в (37) $u = 1$, определяем максимальное значение $q = q_{\text{макс}}$, соответствующее максимальной концентрации плазмы в точке резонанса, при которой он еще остается доступным:

$$q_{\text{макс}} = \frac{(1 + n_{\parallel}^2)^2}{4n_{\parallel}^2}, \quad \frac{1}{3} \leq n_{\parallel}^2 \leq 1,$$

где $n_{\parallel}(x)$ берется в точке циклотронного резонанса. При $n_{\parallel}^2 < 1/3$ для необыкновенной волны, а также в случае обыкновенной волны значение $q_{\text{макс}}$ определяется отсечкой, и ее можно найти из формул (47), положив в них $u = 1$. Найденные таким образом условия доступности резонанса со стороны сильного магнитного поля при положении резонансного слоя в максимуме концентрации или слева от него суммированы на рис. 8.

Для волн, запускаемых с внешней стороны тора, условия доступности циклотронного резонанса являются заметно более жесткими. Так, необыкновенная волна вообще не может достичь резонанса. Обыкновенная волна отсекается при $q_0 \geq 1$, если $n_{\parallel}^2 < 1/2$, при $q_0 \geq 2(1 - n_{\parallel}^2)$ для значений $n_{\parallel}^2 > 1/2$. При $n_{\parallel}^2 \approx 1/2$ и $q > 1$ на поверхности $q = 1$ возможна, в принципе, ее трансформация в необыкновенную волну, распространяющуюся сначала в область более плотной плазмы ($1 - q < 9/8$), а потом поворачивающую в сторону гибридного резонанса [15—18].

В случае $n_y^2 \neq 0$ доступной является только та часть плазмы, где $n_x^2 = n_{\perp}^2 - n_y^2 > 0$. Используя кривые $n_{\perp}^2(x, n_{\parallel})$, приведенные на рис. 5—7, легко проследить качественно за изменением картины доступности при $n_y^2 \neq 0$. Ясно, что с ростом n_y^2 доступность резонанса заметно ухудшается.



в том, что точка

§ 5. Циклотронное затухание волн в модели одномерной неоднородности

Рассмотрим теперь эффекты, связанные с тепловым движением электронов, уделяя главное внимание, естественно, затуханию волн. Из результатов § 2 ясно, что это затухание сосредоточено в узком слое $[\omega - \omega_B(x)]^2 \ll k_{\parallel}^2 v_T^2$, внутри которого можно пренебречь изменениями концентрации плазмы и ее температуры, а неоднородность магнитного поля учитывать только в аргументе дисперсионной функции $Z\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_{\parallel} v_T}\right)$ в уравнении (13). При этом для вычисления коэффициента поглощения волны (оптической толщины плазмы)

$$\Gamma = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k_x'' dx$$

по существу необходимо вычислить интеграл [см. (9)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) dx = Ln_{\parallel} \beta \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} [\zeta Z^{-1}(\zeta)] d\zeta,$$

где учтено, что $\zeta = (\omega - \omega_B)/k_{\parallel} v_T = x/Ln_{\parallel} \beta$, L — характерный размер неоднородности магнитного поля. В токамаках, очевидно, $L = R_0$. Для вычисления интеграла удобно сместить контур интегрирования в комплексную область $\text{Im}(\omega - \omega_B) > 0$, так чтобы всюду на контуре интегрирования выполнялось условие $|\omega - \omega_B| \gg k_{\parallel} v_T$ и можно было использовать асимптотику функции $Z_1(\zeta) = 1 + (2\zeta^2)^{-1} + \dots$

Раскладывая подынтегральное выражение в ряд по степеням $1/\zeta$ и учитывая известное соотношение $\text{Im} \frac{1}{\zeta} = -\pi \delta(\zeta)$, эквивалентное правилу обхода Ландау, и используя (5), получаем после вычисления $\frac{\partial \Lambda_0}{\partial k_x}$ (см. [9]) окончательное выражение для Γ :

$$\Gamma = \frac{\pi \beta^2 \omega L}{4cn_x} \frac{qn_{\perp}^4 (2 - q - n_{\perp}^2) (2n_{\perp}^2 - 3 + 3q)^2}{[2(1 - q) - n_{\perp}^2]^2 [(n_{\perp}^2 - 2 + 2q)^2 + q(1 - q)]}, \quad (38)$$

$$n_{\perp}^2 = n_x^2 + n_y^2$$

Расчет циклотронного затухания волн можно провести и несколько другим способом, воспользовавшись дисперсионным уравнением в приближении слабой пространственной дисперсии, которое в окрестности циклотронного резонанса может быть представлено в виде

$$\Lambda_0 + \frac{2\beta^2}{(u-1)q} \Lambda_1 + \frac{(u-1)n_{\perp}^4}{4} = 0, \quad (39)$$

где Λ_0 и Λ_1 определяются формулой (13). Решения этого уравнения при $\left| \frac{\beta^2}{(1-u)} \right| \ll 1$ легко находятся по теории возмущений и имеют вид: $n_x = n_{x0} + \beta^2 \Lambda_2 (1-u)^{-1}$, где $\Lambda_2 = 2\Lambda_1 \left(q \frac{d\Lambda_0}{dn_x} \right)^{-1} \Big|_{n_x = n_{x0}}$;

n_{x0} — решение уравнения $\Lambda_0 = 0$. Полагая $1-u = 2x/L$, находим

$$\int k_x dx = \frac{\omega}{c} n_{x0} x + \frac{\omega L}{2c} \beta^2 \Lambda_2 \ln(u-1) + \text{const.} \quad (40)$$

Квазиклассическое решение (34) вида $E \sim \exp(i \int k_x dx)$ справедливо, естественно, не только на вещественной оси, но и в комплексной плоскости x . Оно может быть непрерывно продолжено через те секторы в комплексной плоскости, в которых это решение является экспоненциально убывающим при $|x| \rightarrow \infty$. В данном случае, в зависимости от знака n_{x0} , это верхняя или нижняя полуплоскость. С другой стороны, асимптотическое представление дисперсионного уравнения вида (39) справедливо только при $\text{Im}(\omega - \omega_B) \geq 0$. Таким образом, получается, что мы можем продолжать решение вида (34) на комплексную плоскость только для одного знака n_{x0} , соответствующего волне, распространяющейся со стороны сильного магнитного поля. При обходе точки $u-1=0$ в комплексной плоскости аргумент логарифма в формуле (40) изменяется на π , что приводит к появлению мнимого слагаемого в выражении для квазиклассического интеграла

$$\frac{1}{2} \Gamma = \text{Im} \int k_x dx = \pi \frac{\omega L}{2c} \beta^2 \Lambda_2. \quad (41)$$

Нетрудно убедиться, что эта величина в точности совпадает с коэффициентом поглощения волны (38).

Из приведенного анализа можно сделать два важных вывода. Во-первых, при получении формул (39)–(41) никаких ограничений на величину n_{\parallel}^2 снизу не накладывалось. Соответственно формулы (38), (41) должны правильно описывать коэффициент поглощения волн при $n_{\parallel}^2 = 0$. Этот факт весьма удивителен, поскольку при $n_{\parallel}^2 = 0$ для обыкновенной волны $n_{\perp 1}^2 \rightarrow 1-q$ и два последних слагаемых в формуле (13) неограниченно возрастают. При этом метод последовательных приближений по малому параметру $1/\sigma$, использованный при выводе уравнения (13), оказывается непригодным. Однако при переходе в комплексную плоскость эти слагаемые взаимно компенсируются, так что разложение по $\beta^2/(1-u)$ оказывается вполне возможным.

Второй вывод состоит в том, что коэффициент циклотронного поглощения может быть строго рассчитан только для волны, распространяющейся со стороны сильного магнитного поля. Конечно, мы можем продлить через полуплоскость $\text{Im}(\omega - \omega_B) > 0$ и растущее квазиклассическое решение и получить правильное выражение для амплитуды прошедшей волны (коэффициент «поглощения» бу-

дет тем же самым). Однако ясно, что в этом случае из-за явления Стокса могут появляться решения, соответствующие отраженной волне, так что ослабление волны при прохождении сквозь резонансный слой может быть обусловлено не только поглощением ее энергии, но и отражениями [19—21].

Проанализируем теперь более подробно выражение (38) для коэффициента поглощения Γ . Прежде всего учтем, что формула (5) может быть преобразована к виду

$$n_{\parallel}^2 = (n_{\perp}^2 - 1 + q)(n_{\perp}^2 - 2 + q)(2 - 2q - n_{\perp}^2)^{-1}. \quad (42)$$

Таким образом, в случае $n_x = n_{\perp}$ мы получаем параметрическое представление коэффициента поглощения Γ через n_{\perp}^2 . Задавая n_{\perp}^2 , мы определяем коэффициент поглощения Γ и одновременно по формуле (42) величину n_{\parallel}^2 , соответствующую такому поглощению. Границы, в которых следует менять n_{\perp}^2 , легко установить из вида кривых $n_{\parallel}^2 = n_{\perp}^2(n_{\perp}^2)$.

Из формулы (42) видно, что $n_{\parallel}^2 \rightarrow 0$ при $n_{\perp}^2 \rightarrow 2 - q$ и $n_{\perp}^2 \rightarrow 1 - q$. Первый случай соответствует необыкновенной волне. Как видно из (38), коэффициент поглощения Γ необыкновенной волны при этом с рассматриваемой точностью обращается в нуль. Поглощение обыкновенной волны остается при $n_{\parallel}^2 = 0$ конечным и равным

$$\Gamma = \frac{\pi \beta^2 \omega L}{4c} q \sqrt{1 - q}.$$

При $n_{\perp}^2 \rightarrow 2(1 - q)$ и $\Gamma \rightarrow \infty$. Из (42) видно, что этот случай соответствует $n_{\parallel}^2 \rightarrow \infty$. Как уже отмечалось, в условиях токамаков волна с $n_{\perp}^2 > 1$ не может быть запущена из вакуума вглубь плазмы, и поэтому мы не будем рассматривать этот случай.

При $[n_{\perp}^2 - 2(1 - q)]^2 = (q - 1)q$ описанная в § 4 трансформация волн происходит как раз в окрестности циклотронного резонанса. Приближение геометрической оптики при этом, естественно, нарушается. С этим и связано обращение Γ в этой точке в бесконечность. В интервале $1 < q < 4/3$ при $n_{\parallel}^2 \geq 2q - 1 - 2\sqrt{q(q - 1)}$ циклотронный слой оказывается недоступным для волн (n^2 является в этом случае комплексной величиной). При $0 < n_{\perp}^2 < 2(1 - q) + \sqrt{q(q - 1)}$ в интервале $4/3 > q > 1$ величина Γ формально становится отрицательной. Это связано с изменением знака групповой скорости волны. В этом диапазоне мы должны положить $n_x = -n_{\perp} < 0$ для рассматривавшегося ранее обхода.

Более полное представление о зависимости коэффициента поглощения Γ от концентрации плазмы (параметра $q|_{u=1}$) и величины $n_{\parallel}^2|_{u=1}$ можно получить из рис. 9, 10, на которых представлены результаты численного расчета.

Особого рассмотрения заслуживает случай поглощения необыкновенной волны при $n_{\parallel}^2 = 0$. Как уже отмечалось, с точностью до членов порядка β^2 поглощение в этом случае отсутствует. Для его расчета можно использовать релятивистские выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ вида (19)—(21), рассчитанные, однако, с точностью до β^4 . Для вычисления удобно использовать асимптотические представ-

Рис. 9. Зависимость оптической толщины циклотронного слоя Γ для необыкновенной волны от q

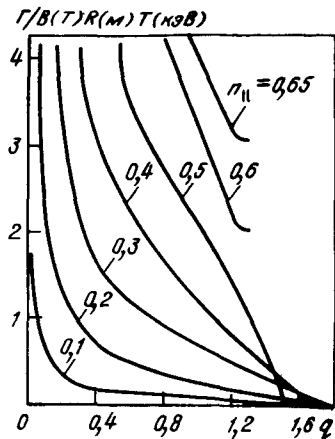
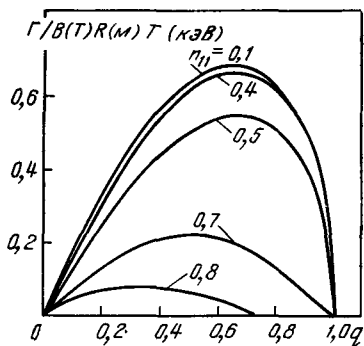


Рис. 10. Зависимость оптической толщины циклотронного слоя Γ для обыкновенной волны от q



ления функций F_p и обходить резонансную точку $\omega = \omega_B$ в комплексной плоскости в области $|\omega - \omega_B| \gg \omega\beta^2$. В результате [22]

$$\Gamma = (2 - q)^{3/2} \left(-1 + \frac{q}{4} + \frac{5}{4q} \right) \frac{\pi R_0 \omega}{c} \beta^4.$$

Приведенные в этом параграфе результаты применимы только для достаточно плотной плазмы $q \gg \beta$.

§ 6. Отражение волн от резонансной зоны

Как уже отмечалось, в окрестности циклотронного резонанса может происходить не только поглощение, но и отражение волн [19—21]. Рассмотрим это явление на примере обыкновенной волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю (при $n_{\parallel} = 0$), пренебрегая для простоты изменениями q в резонансном слое. Мы будем использовать модельное уравнение, получаемое из дисперсионного уравнения $n^2 = \epsilon_{zz}$ заменой $k_x \rightarrow -i \frac{d}{dx}$:

$$(1 + \alpha(x)) \frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 - q) E = 0, \quad (43)$$

где $E = \int E_z dx$ (см. [20]), $\alpha = \frac{q}{2} F_{1/2} \left(\frac{\omega - \omega_B}{\omega\beta^2} \right)$,

функция $F_{7/2}$ определяется формулой (22). В уравнении (43) удобно перейти к новым переменным

$$\psi = \sqrt{n} E, \quad \xi = \frac{\omega}{c} \int_0^x n(x') dx', \quad n^2(x) = \frac{1-q}{1+\alpha(x)}$$

— «квазиклассический» показатель преломления, начало координат выбрано в точке резонанса. В новых переменных получаем

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \psi = V\psi,$$

где $\frac{\omega^2}{c^2} V = \frac{n''}{2n^3} - \frac{3n'^2}{4n^4}$, штрих здесь означает дифференцирование по координате x . Это уравнение при $\alpha \ll 1$ (и при произвольном $|\alpha|L$) можно решать по теории возмущений, выбирая в качестве нулевого приближения $\psi = e^{-i\xi}$ (т. е. квазиклассическую волну, падающую со стороны слабого магнитного поля). Тогда в первом приближении при $x \rightarrow \infty$ находим $\psi = e^{-i\xi} + \tilde{r}e^{i\xi}$, где коэффициент отражения \tilde{r} определяется интегралом

$$\tilde{r} = -\frac{i\omega}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} V e^{-2i\xi} n d\xi.$$

При вычислении \tilde{r} следует проинтегрировать первое слагаемое под интегралом по частям и оставить только линейные по α члены. Затем удобно модифицировать контур интегрирования, проводя его из минус бесконечности вокруг точки $x=0$ в минус бесконечность. При этом интеграл будет определяться только слагаемым в $F_{7/2}$, содержащим ветвление. В результате находим

$$\tilde{r} = (1 - i\chi)^{-7/2} \Gamma, \quad (44)$$

где Γ — коэффициент поглощения по мощности, определяемый формулой (38), $\chi = \sqrt{(1-q)} \beta^2 \frac{\omega L}{c}$, магнитное поле считалось изменяющимся по линейному закону $\omega_B = \omega(1-x/L)$.

Из приведенной формулы видно, что модуль коэффициента отражения максимален при $\chi = \sqrt{2/5}$,

когда ширина области поглощения соизмерима с длиной волны. На рис. 11 приведены графики модуля коэффициента отражения, рассчитанные по формуле (44) и путем численного интегрирования уравнения (43) [20].

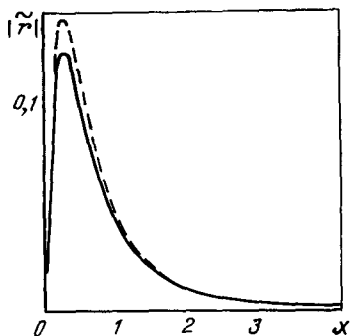


Рис. 11. Зависимость коэффициента отражения обыкновенной волны от резонансного слоя от χ :

пунктир — расчет по формуле (44), сплошная линия — численный счет уравнения (43) [20]

Видно, что формула (44) неплохо аппроксимирует коэффициент отражения \tilde{r} даже при $q=0,5$, хотя для применимости расчета необходимо было условие $q \ll 1$.

Задача. Используя теорию возмущений, рассчитать отражения на гармониках циклотронной частоты.

Решение. При расчете следует исходить из уравнений Максвелла, используя в них для тензора электрической проницаемости формулы (19)–(21), причем в дисперсионных поправках к тензору можно заменить n_{\perp}^2 на соответствующее решение дисперсионного уравнения для холодной плазмы. После этого вычисления аналогичны рассмотренным выше. Если пренебречь изменениями магнитного поля всюду, кроме аргумента функции F_p , получим выражения для коэффициента отражения (по амплитуде) и поглощения (по мощности) Γ :

$$\Gamma_1 = \frac{\pi q R_0}{\omega c} \frac{(s \sqrt{1-q})^{2s-1}}{2^{2s} s!} \beta^{2s}; \quad \tilde{r}_1 = \Gamma_1 (1 - i\chi)^{-(s+3/2)};$$

$$\Gamma_2 = \frac{\pi \omega_p^2 R (\beta^2 s^2 N_2^2)^{s-1}}{\omega c 2^{2s-1}} \frac{(\omega^2 + \omega \omega_B - \omega_p^2)^2 (\omega - \omega_B)^2}{N^2 (\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_p^2)^2 \omega^2};$$

$$\tilde{r}_2 = \Gamma (1 - i\chi_2)^{-s-3/2}, \quad \chi_0 = \sqrt{1-q} \frac{\omega R}{c} \beta^2, \quad s > 2, \quad \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1.$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к обыкновенной и необыкновенной волнам соответственно; N_2 — показатель преломления для необыкновенной волны в приближении холодной плазмы.

§ 7. Линейная трансформация волн в окрестности верхнего гибридного резонанса

Как уже упоминалось, еще одной областью плазмы, в которой существенна пространственная дисперсия, является окрестность гибридного резонанса $\epsilon=0$. Согласно (35) в холодной плазме при $\epsilon \rightarrow 0$ для необыкновенной волны имеем

$$n_{\perp}^2 = -\tilde{B}/\tilde{A} = -(\eta n_{\parallel}^2 + g^2)/\epsilon, \quad (45)$$

так что $n_{\perp}^2 \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Возникающая особенность устраняется при учете пространственной дисперсии; оказывается достаточным [4] использовать приближение слабой пространственной дисперсии, т. е. считать величину $\lambda = k_{\perp}^2 v_T / \omega_B$ малой и сохранять в разложении тензора ϵ_{α} по λ только члены низшего порядка. Фактически при этом необходимо учитывать тепловую поправку только в компоненте ϵ_{xx} , «холодная» часть которой в окрестности гибридного резонанса аномально мала. В этом приближении [4] $\epsilon_{xx} = \epsilon - \gamma n_{\perp}^2$, $\gamma = 1,5q\beta^2(1-u)^{-1}(1-4u)^{-1}$, а остальные компоненты тензора ϵ_{α} описываются формулами (1), (2). При подстановке этого выражения в дисперсионное уравнение (35) его порядок повышается

и появляется новая ветвь колебаний. Для решений с большим показателем преломления $n_{\perp}^2 \gg 1$ вместо (45) теперь получается

$$n_{\perp}^2 = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\gamma B}}{2\gamma}. \quad (46)$$

При нагреве плазмы на основной гармонике циклотронной частоты $\gamma < 0$, и формула (46) описывает две ветви колебаний, распространяющихся при $\varepsilon < 0$. Нижняя ветвь вдали от гибридного резонанса переходит в необыкновенную волну (45); для верхней ветви асимптотически имеет $n_{\perp} \rightarrow \varepsilon/\gamma$. Это выражение представляет собой предельное (при $k_{\perp} \rightarrow 0$) выражение показателя преломления моды Бернштейна

$$k_{\alpha} k_{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \quad (47)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение (35) с тепловой поправкой описывает линейную трансформацию необыкновенной волны в моду Бернштейна. Соответствующий анализ [15, 23] показывает, что в слабонеоднородной плазме при условии доступности гибридного резонанса трансформация является практически полной: необыкновенная волна, падающая на резонансный слой, отражается от него в виде моды Бернштейна. Волна, распространяющаяся со стороны слабого магнитного поля, также в принципе испытывает трансформацию в точке верхнего гибридного резонанса благодаря подбарьерному проникновению через область непрозрачности; в условиях токамака этот эффект, однако, как правило, пренебрежимо мал. При удалении от гибридного резонанса показатель преломления бернштейновской волны быстро возрастает, и она полностью затухает в области плазмы, лежащей между поверхностями верхнегибридного и циклотронного резонансов, за счет черенковского поглощения. Поскольку эффективность трансформации не зависит от T_e , оказывается, что необыкновенная волна, запускаемая со стороны сильного магнитного поля, полностью поглощается в плазме независимо от T_e . При низких температурах поглощение энергии идет через трансформацию и затухание бернштейновской моды, с ростом T_e с этим процессом начинает конкурировать прямое затухание электромагнитной волны в циклотронном слое, которое становится основным при высоких температурах.

§ 8. Уравнение эйконала в окрестности циклотронного резонанса и лучевые траектории волн

Приближение геометрической оптики в своей классической форме развивалось, главным образом, применительно к дифференциальным уравнениям. Волновые уравнения для среды с пространственной дисперсией представляют собой, как отмечалось, интегродифференциальное уравнение, так что необходимо соответствующее обобщение этого приближения. В случаях, когда антиэрми-

тогда часть тензора электрической проницаемости мала, такое обобщение в идейном отношении довольно тривиально (см., например, [24]), хотя и несколько громоздко. Однако в непосредственной окрестности электронного циклотронного резонанса тензор электрической проницаемости существенно антиэрмитов [см. (9)], что заметно осложняет картину. При выводе уравнений геометрической оптики, пригодных в окрестности циклотронного резонанса, мы будем исходить из уравнения Максвелла и линеаризованного кинетического уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial v} &= -\frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial F}{\partial v}; \\ \mathbf{j} &= e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Здесь \mathbf{B}_0 — внешнее магнитное поле; F — невозмущенная функция распределения электронов по скоростям. Будем считать функцию F изотропной в пространстве скоростей $F \equiv F(v^2, \mathbf{r})$. Тем самым мы пренебрегаем целым рядом эффектов, обусловленных неоднородностью плазмы и, в частности, эффектами, связанными с дрейфами электронов. Можно думать, что для интересующих нас электромагнитных волн с фазовыми скоростями порядка скорости света эти эффекты не существенны.

Для решения кинетического уравнения удобно ввести локальную систему координат, в которой одна из декартовых осей (u_z' , например, где u_α — проекция скорости на новые оси) была бы направлена вдоль внешнего магнитного поля. Поскольку речь идет о простом повороте системы координат, мы можем записать

$$u_\alpha = s_{\alpha\beta} v_\beta, \quad u^2 = v^2, \quad v_\alpha = s_{\alpha\beta}^{-1} u_\beta,$$

где $s_{\alpha\beta}$ — косинусы углов между осями старой и новой систем координат. Очевидно, что $s_{\alpha\beta}^{-1} = s_{\beta\alpha}$.

В новых переменных кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \mathbf{s}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{r}} s_{\beta\gamma}^{-1} u_\gamma \right) - \omega_B \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{e}{T} (\mathbf{E} \mathbf{s}^{-1} \mathbf{u}) F, \quad (50)$$

где $\omega_B = \omega_B(\mathbf{r})$; учтено, что $\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{mv}{T} F$, T — температура электронов; φ — угол в пространстве скоростей в плоскости, перпендикулярной магнитному полю; u_α — проекции скорости в «декартовой» системе координат.

В рамках приближения геометрической оптики решения системы (48) — (50) естественно искать в виде

$$A = \sum_n A^{(n)}(\mathbf{r}) \exp\{i\psi(\mathbf{r}) - i\omega t\},$$

где под A подразумевается любая из величин \mathbf{E} , \mathbf{B} и f . При этом плавно меняющиеся в пространстве амплитуды $A(r)$, представленные в виде формального ряда геометрической оптики, находятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kE}^{(0)}] - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}^{(0)} = 0, \quad [\mathbf{kB}^{(0)}] + \\ + \frac{\omega}{c} \mathbf{E}^{(0)} + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{j}^{(0)} = e \overset{\leftrightarrow}{s}^{-1} \int \mathbf{u} f du; \\ i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) f^{(0)} + \omega_B \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{e}{T} (\mathbf{E}^{(0)} \mathbf{u}) F(u^2) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kE}^{(n)}] - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}^{(n)} = i \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(n-1)}, \quad [\mathbf{kB}^{(n)}] + \\ + \frac{\omega}{c} \mathbf{E}^{(n)} + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^{(n)} = i \operatorname{rot} \mathbf{B}^{(n-1)}; \\ \mathbf{j}^{(n)} = e \overset{\leftrightarrow}{s}^{-1} \int \mathbf{u} f^{(n)} du, \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где $\mathbf{k} = \nabla \varphi$ — волновой вектор в приближении геометрической оптики, $\mathbf{k}\mathbf{u} = k_\alpha s_\beta \alpha_\beta u_\beta$.

Легко видеть, что система уравнений (51) для величин нулевого приближения формально совпадает с соответствующими уравнениями теории однородной плазмы (см., например, [7]), так что мы можем записать

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}^{(0)} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^{(r)}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^{(0)}; \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(r)}(\omega, \mathbf{k}) = s_{\alpha'} \alpha_{\beta'} s_{\beta} \sigma_{\alpha'\beta'}(\omega, \overset{\leftrightarrow}{s} \mathbf{k}), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где $\sigma_{\alpha'\beta'}(\omega, \overset{\leftrightarrow}{s} \mathbf{k})$ — тензор проводимости в системе координат с осью z , направленной вдоль магнитного поля. По виду он совпадает с соответствующим выражением для однородной плазмы, в котором температуру электронов, циклотронную и плазменную частоты следует теперь считать зависящими от координат как от параметров. Чтобы подчеркнуть, что этот тензор зависит от проекции волнового вектора на магнитное поле и на перпендикулярные ему направления (а не от проекций на оси исходной системы координат), в аргументе $\sigma_{\alpha'\beta'}$ отмечена зависимость от $s\mathbf{k}$. Естественно, связь между тензором проводимости в исходной системе координат $\sigma_{\alpha\beta}^{(r)}$ и $\sigma_{\alpha'\beta'}$ в нулевом приближении геометрической оптики дается, как это видно из (53), обычными правилами преобразования тензора при поворотах системы координат.

Выражение для плотности тока $\mathbf{j}^{(1)}$ первого приближения находится из системы (52) и может быть представлено в виде

$$\mathbf{j}^{(1)} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^{(r)} \mathbf{E}^{(1)} + e \overset{\leftrightarrow}{s}^{-1} \int \mathbf{u} h du, \quad (54)$$

где функция h определяется уравнением

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})h + \omega_B \frac{\partial h}{\partial \varphi} = u_{\alpha'} s_{\beta\alpha} \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_{\alpha'}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_{\alpha}} s_{\beta'\beta} \frac{\partial s_{\alpha\beta'}}{\partial x_{\alpha'}} u_{\beta'} \right).$$

Приближение геометрической оптики применимо, естественно, только к слабозатухающим волнам. Однако уравнения (48)–(53) дают конструктивный способ для исследования распространения волн в плавно неоднородной плазме при более жестких ограничениях — в условиях, когда эрмитова часть тензора проводимости $\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*)$ существенно меньше антиэрмитовой части $i\sigma''_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\beta\alpha}^*)$. В этом случае удобно в нулевом приближении геометрической оптики пренебречь затуханием волн [т. е. пренебречь слагаемыми $\sigma'_{\alpha\beta}$ в уравнениях (51)] и включить соответствующие члены в уравнения первого приближения. В результате получается

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}^{(0)} &= \left(k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'_{\alpha\beta} \right) E_{\beta}^{(0)} = 0; \\ [\mathbf{k}\mathbf{E}^{(1)}] - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}^{(1)} &= i \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)}, \quad [\mathbf{k}\mathbf{B}^{(1)}] + \frac{\omega}{c} \mathbf{E}^{(1)} + \\ + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^{(1)} &= i \operatorname{rot} \mathbf{B}^{(0)} - \frac{4\pi i}{c} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^{(r)} \mathbf{E}^{(0)}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(r)}$ — тензор электрической проницаемости плазмы в исходной системе координат. Условие разрешимости системы (55) дает, как и в однородной плазме «дисперсионное» уравнение

$$D = \det | D_{\alpha\beta} | = 0. \quad (56)$$

В неоднородной плазме уравнение (56) может быть использовано непосредственно для нахождения координатной зависимости волнового вектора $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ только в случае одномерной неоднородности, когда эйконал $\psi(\mathbf{r})$ может быть представлен в форме $\psi(\mathbf{r}) = k_x x + k_y y + k_z z$ (ось x направлена вдоль неоднородности, k_y и k_z — постоянные). В общем случае удобно рассчитывать лучевые траектории и следить за изменением \mathbf{k} вдоль этих траекторий исходя из системы уравнений [24, 25]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &\equiv \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = - \left[\frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} ; \frac{\partial D}{\partial \omega} \right]^{-1}; \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{\partial D}{\partial \omega} \right]^{-1}, \end{aligned} \right\}$$

удобной при рассмотрении задач об эволюции волновых пакетов. При исследовании стационарного распространения волн часто оказывается удобным использовать эти уравнения в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= - \frac{\partial D}{\partial k} \left| \frac{\partial D}{\partial k} \right|^{-1} \operatorname{sgn} \frac{\partial D}{\partial \omega}; \\ \frac{\partial k}{\partial s} &= \frac{\partial D}{\partial r} \left| \frac{\partial D}{\partial k} \right|^{-1} \operatorname{sgn} \frac{\partial D}{\partial \omega}, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

где s — длина дуги вдоль лучевой траектории.

С математической точки зрения уравнения (57) представляют собой уравнения характеристик дисперсионного уравнения (56), являющегося нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно функции $\psi(\mathbf{r})$. Эти уравнения остаются в силе и в случае сильной неэрмитовости тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$, однако их физический смысл как лучей, вдоль которых распространяется энергия, при этом теряется. Для анализа этой задачи мы воспользуемся введенным в § 2 малым параметром $\beta = v_T/c$. При этом, по аналогии со случаем однородной плазмы, можно ожидать, что малость β в определенных условиях [при определенных ограничениях на масштаб неоднородности плазмы и поля $E^{(0)}(\mathbf{r})$] позволит нам отождествить в низшем порядке по β полный поток энергии с потоком электромагнитной энергии, а затухание волн рассчитывать либо из уравнения (30), либо интегрируя вдоль луча мнимую часть волнового вектора, рассчитанную из уравнения (13). При этом лучевые траектории и изменение \mathbf{k} вдоль траектории удобнее всего рассчитывать по формуле (56) с $D(\omega, \mathbf{k})$, соответствующим приближению холодной плазмы, хотя, конечно, как и раньше, в качестве $D(\omega, \mathbf{k})$ можно выбирать любую функцию $\tilde{D}(\omega, \mathbf{k})$, мало отличающуюся от точного выражения (на величину порядка β) и обеспечивающую вещественные решения для $\mathbf{k}(\omega, \mathbf{r})$. Как ясно из § 3 [см. уравнение (31)], в зависимости от этого выбора будет изменяться набег фазы комплексной амплитуды $E^{(0)}(\mathbf{r})$, но не затухание волн.

Другими словами, этот произвол в выборе $\tilde{D}(\omega, \mathbf{k})$ связан с некоторым произволом в разбиении всей фазы поля на части, обусловленные эйконалом ψ и комплексной фазой амплитуды.

Рассмотрим теперь условия, при которых такое пренебрежение вторым слагаемым в формуле (54) является законным. Так же как в работе [13], будем пренебрегать кривизной силовых линий магнитного поля и широм (т. е. положим $s_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Ясно, что в условиях токамаков такое пренебрежение является оправданным, поскольку $R_0 \gg a$, а полоидальное поле обычно мало. Можно показать [26], что по порядку величины

$$\frac{4\pi e}{\omega} \int h\nu d\nu = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{E}.$$

Таким образом, мы должны потребовать

$$\operatorname{div} s_0 \sim \beta k s_0 \gg \left| \frac{4\pi}{\omega} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}}{\partial k \partial r} E_{\alpha}^* E_{\beta} \right|. \quad (58)$$

Компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ зависят от пространственных координат, в частности, и через аргумент дисперсионной функции Z . Дифференцирование по k_{\parallel} , как уже отмечалось в §3, не изменяет порядок величины рассматриваемых слагаемых по параметру β , однако дифференцирование по координате, так же как и по частоте, приводит к появлению большого множителя β^{-1} . В результате оказывается, что условие (58) приводит к неравенствам

$$n_{\parallel} \beta k_{\parallel} L \gg 1; \quad \beta^2 (n_{\parallel}^2 + \beta^2) k_{\perp}^2 L^2 \gg 1, \quad (59)$$

где L_{\parallel} и L_{\perp} — характерные масштабы неоднородности вдоль магнитного поля и перпендикулярны ему.

В условиях экспериментов на больших токамаках эти условия легко могут быть выполнены.

§ 9. О применимости геометрической оптики в окрестности циклотронного резонанса

При обсуждении условий применимости приближения геометрической оптики в лучевой трактовке к задачам о циклотронном поглощении волн в реальных условиях и установках возникает три круга проблем. Прежде всего это обычные для геометрической оптики проблемы, связанные с пересечением «квазиклассических» решений и с «вырождением» поляризаций волн. Далее следует упомянуть вопрос о дифракции волн, приобретающий особую остроту в случае неоднородной неоднородности. Наконец, в окрестности циклотронного резонанса возникает новая проблема, обусловленная пространственной дисперсией, т. е. нелокальностью связи между электрическим полем волны и током в плазме. Дело в том, что, как следует из работ [9, 14, 27, 28], неоднородность магнитного поля изменяет характер резонансного взаимодействия электронов с волной, поскольку из-за движения электрона вдоль неоднородного магнитного поля происходит фазовое рассогласование между его циклотронным вращением и полем волны, вследствие которого электрон выходит из резонанса с волной. Выходя из области резонанса, электрон «запоминает» фазу поля, и в результате образуются когерентно промодулированные пучки электронов. Из-за теплового разброса по скоростям эти пучки вдали от резонансной зоны начинают интерферировать, однако «фазовая» память в определенных условиях может сохраняться на значительные расстояния, приводя к явлениям типа пространственного эха, просветления барьеров и т. п. [29]. Более того, в некоторых условиях изменение характера резонансного взаимодействия электронов с волной существенно влияет на структуру поля в резонансной зоне [9], так что приближенный учет нелокальности с помощью производных [представление тока в форме (25)] становится вообще некорректным. Это видно было уже из рассмотренного в § 3 примера квазимонохроматической волны с гауссовым распределением электрического поля (см. задачу к § 3). Хотя на эту тему получено в настоящее время довольно много конкретных результатов в рамках различных моделей неоднородности

плазмы, вопрос о роли нелокальных эффектов в рамках приближения геометрической оптики изучен довольно слабо. Попытаемся высказать на эту тему только некоторые соображения, которые будут носить, естественно, предварительный характер.

На первый взгляд, разложение по параметру малости $1/kL$, проведенное в § 9, доказывает применимость геометрико-оптического подхода (во всяком случае, при $\beta \ll 1$). Однако это не так. Чтобы убедиться в этом, вычислим амплитуду функции распределения f , не прибегая к процедуре разложения по малому параметру геометрической оптики. Для простоты ограничимся моделью неоднородного магнитного поля с прямыми силовыми линиями, пренебрежем неоднородностью концентрации и температуры плазмы и учтем резонансную компоненту поля $\mathbf{E} = \frac{1}{2} E_1 (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y)$. Подставляя в уравнение (50) $\tilde{f} = f \exp[i(\psi - \omega t)]$, $\mathbf{E} = \mathbf{E} \exp[i(\psi - \omega t)]$ и полагая $\frac{k_{\perp} v_T}{\omega_B} \rightarrow 0$, получаем

$$i(\omega - k_z v_z) f - \omega_B \frac{\partial f}{\partial \psi} - v_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{e}{2T} E_1 v_{\perp} F e^{i\psi}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$f = -\frac{e v_{\perp} F}{2T v_z} \int_{\mp \infty}^z E_1 \exp \left[i \int_{z'}^z \frac{\omega - \omega_B(z) - k_z v_z}{v_z} dz'' \right] dz',$$

где знак нижнего предела интегрирования определяется знаком v_z — минус при $v_z > 0$ и плюс при $v_z < 0$.

Сделаем в интегралах замены переменных $z' = \xi + z$, $z'' = \xi' + z$ и представим плавные функции $E_1(z + \xi)$, $\omega_B(z + \xi')$ и $k_z(z + \xi')$ в виде разложений по степеням ξ и ξ' соответственно. В результате после интегрирования по поперечным скоростям находим для компоненты $j_1 = -e \int (v_x - i v_y) f dv$ следующее выражение:

$$4\pi j_1 = \frac{\omega_p^2 E_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\tau \exp[i(\omega - \omega_B)\tau] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{v_z^2}{v_T^2} - i\tau v_z \left(k_z - \frac{\omega'_B \tau}{2} \right) + i v_z^2 \tau^2 \left(\frac{k'_z}{2} - \frac{\omega''_B \tau}{6} \right) \right] \frac{dv_z}{v_T}, \quad (60)$$

где введена новая переменная интегрирования $\tau = \xi'/v_z$,

$$\omega'_B = d\omega_B(z)/dz, \quad k_z = k_z(z), \quad k'_z = dk_z(z)/dz,$$

производные от электрического поля в предэкспоненциальном множителе для простоты отброшены.

Вдали от экстремумов магнитного поля в случае слабой неоднородности экспоненту под интегралом (60) можно разложить в ряд по $\left(\frac{k'_z}{2} - \frac{\omega''_B \tau}{6} \right)$

выполнить интегрирование по скоростям. Старший учлен в разложении приводит к выражению

$$i_1 = \frac{\omega_p^2 E_1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau \exp \left[i(\omega - \omega_B) \tau - \frac{k_z^2 v_T^2 \tau^2}{4} \left(1 - \frac{\omega_B' \tau}{2k_z} \right)^2 \right]. \quad (61)$$

Рассмотрим вначале волну, распространяющуюся в сторону увеличения магнитного поля ($\omega_B'/k_z > 0$). При этом интеграл в (61) удобно представить в виде суммы двух интегралов по контурам C_1 и C_2 (рис. 12). В интеграл по

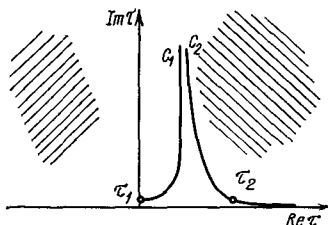


Рис. 12. Контур интегрирования в (61)

контуру C_1 основной вклад вносят начало пути и перевальная точка

$$\tau_1 = \frac{2i(\omega - \omega_B)}{k_z^2 v_T^2}. \text{ При выполнении условия (59) на всем участке контура}$$

C_1 , определяющем основной вклад в интеграл, слагаемые с ω_B' в показателе экспоненты оказываются малыми и ими можно пренебречь. Оставшийся интеграл совпадает с одним из представлений дисперсионной функции $Z \left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z v_T} \right)$.

Интеграл по контуру C_2 определяется перевальной точкой $\tau_2 = \frac{2k_z}{\omega_B'} + \frac{2i(\omega - \omega_B)}{k_z^2 v_T^2}$. В результате простых вычислений находим выражение для полного тока:

$$\tilde{I}_1 = \sigma_{11}(k_z) E_1(z) \exp [i k_z(0) z + i\psi(0)] + 2\sigma'_{11}(k_z) E_1(z) \exp [-i k_z(0) z].$$

Здесь мы учли, что в окрестности резонанса можно положить $(\omega - \omega_B)/\omega_B' = -z$, $\psi(z) = \psi(0) + k_z(0)z$. Таким образом, получается, что при падении волны со стороны слабого магнитного поля в резонансном слое $\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z v_T} \right)^2 \sim 1$ генерируется ток с противоположным направлением волнового вектора, который, естественно, будет возбуждать отраженную волну. В бесстолкновительной плазме и при вещественной частоте этот ток не стремится к нулю при $L_{\parallel} \rightarrow \infty$. Для получения соответствующего предельного перехода к случаю однородной плазмы мы должны считать в соответствии с правилом Ландау $\text{Im } \omega > 0$, так чтобы

$$\text{Re} \left[\frac{i k_z (\omega - \omega_B)}{\omega_B'} \right] \rightarrow -\infty \text{ при } \omega_B' \rightarrow 0.$$

Рассмотрим теперь волну, распространяющуюся в сторону убывания магнитного поля. При $\frac{\omega_B'}{kz} < 0$ подынтегральная функция в (61) монотонно убывает после прохода первой перевальной точки τ_1 , так что интеграл сводится при $\frac{\omega_B}{k_z^2 v_T L_{\parallel}} \ll 1$ к дисперсионной функции, и мы получаем

$$j_1 = \sigma_{11} E_1.$$

Отсюда можно сделать вывод, что разложение по малому параметру геометрической оптики $1/kL$, описанное в § 8, применимо, строго говоря, только для волн, распространяющихся со стороны сильного магнитного поля. Для волн, распространяющихся в противоположную сторону, формальный ряд геометрической оптики оказывается, по-видимому, расходящимся.

Хотя продольная неоднородность магнитного поля в токамаках является слабой (она связана с полоидальным полем), рассматриваемый эффект может оказаться, вообще говоря, существенным. Однако можно думать, что при $n_{\perp} \geq n_{\parallel}$ он не будет приводить к ухудшению эффективности нагрева, поскольку отраженная (по оси z) волна может по-прежнему распространяться в сторону резонанса в поперечном к магнитному полю направлении.

§ 10. Лучевые траектории и поглощение волн в токамаках

Как уже отмечалось, к настоящему времени проведено большое количество численных расчетов лучевых траекторий и затухания волн в реальных условиях экспериментов по электронному циклотронному нагреву плазмы [5, 6, 30—39] и сложилась довольно полная картина волновых явлений в данном частотном диапазоне в плазме токамаков. Основные черты этой картины были заложены уже первыми работами на эту тему [30, 31]) и в последующем главным образом уточнялись разнообразные детали.

Мы не будем здесь анализировать эти многочисленные данные. Вместо этого в иллюстративных целях изложим результаты одной из работ [37] и на этом примере обсудим основные особенности распространения и поглощения волн в токамаках. В этой работе интегрирование уравнений (57) проводилось в «тороидальной» системе координат r, θ, φ , где r — радиус в малом сечении токамака, θ и φ — углы, отсчитанные по малому и большому обходам тора соответственно. При этом, вдали от гибридного резонанса, электромагнитные волны описывались в приближении холодной плазмы (35), а бернштейновские — уравнением (47). Их взаимная трансформация в окрестности гибридного резонанса описывалась в рамках приближения слабой пространственной дисперсии. Затухание волн рассчитывалось путем интегрирования мнимой части k вдоль траектории. Для электромагнитных волн $\text{Im} k$ находилась из (13), для бернштейновских — из (47). Пара-

метры плазмы считались распределенными в малом сечении тора в соответствии с формулами

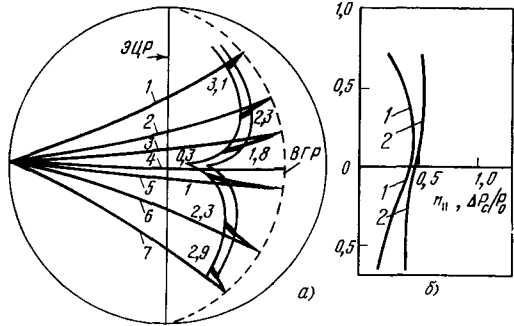
$$q = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = q_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{P_1}, \quad T_e = T_0 \exp\left(-P_2 \frac{r^2}{a^2}\right),$$

$$B_\theta = \frac{8\pi^2}{cr} \int_0^r j(r') r' dr';$$

$$j = j_0 \exp\left(-\frac{3}{2} P_2 \frac{r^2}{a^2}\right) \sim T_e^{1/2}, \quad B_\varphi = B_{\varphi 0} \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R}\right)^{-1}.$$

Рис. 13. Лучевые траектории необыкновенных волн:

a — проекция лучевых траекторий на малое сечение тора. Участки траекторий, где поглощается более 99% мощности бернштейновских волн, отмечены жирной линией. Характерное значение величины n_{\parallel} в области поглощения указано в конце каждой траектории ($q_0=0,6$; $u_0=1$; $\delta=48^\circ$); 1 — $\alpha=27^\circ$; 2 — $\alpha=13^\circ$; 3 — $\alpha=6^\circ$; 4 — $\alpha=-3^\circ$; 5 — $\alpha=-6^\circ$; 6 — $\alpha=-13^\circ$; 7 — $\alpha=27^\circ$; б — зависимость относительного поглощения



мощности необыкновенной волны $1 - e^{-\Gamma}$ в области ЭЦР (кривая 1) и величины n_{\parallel} от положения точки пересечения линии циклотронного резонанса лучевой траекторией (кривая 2)

При подходящем выборе параметров P_1 и P_2 эти выражения достаточно точно описывали экспериментальные данные на установках, для которых проводились расчеты.

На рис. 13 представлены лучевые траектории необыкновенных волн, запущенных с периферии плазмы с внутренней стороны тора под разными начальными углами к магнитному полю ($\alpha = \arctg \frac{k_{\theta 0}}{k_{0r}}$ — угол запуска в малом сечении по отношению к малому радиусу $\delta = \arctg \frac{k_{0r}}{k_{0\varphi}}$). Расчет проведен для параметров

$R=62$ см, $a=15$ см, $B_{\varphi 0} = 10_4$ Гс, $T_0=300$ эВ, $J_p=30$ кА. Однако картина траекторий весьма слабо чувствительна к параметрам установок и определяется в основном положением линии электронного циклотронного резонанса (ЭЦР) и величиной q_0 . Некоторая несимметрия картины траекторий относительно экваториальной плоскости обусловлена влиянием полоидального магнитного поля, с учетом которого среда становится неоднородной вдоль силовых линий магнитного поля, что приводит к изменению n_{\parallel} вдоль траекторий, отличающемуся для верхней и нижней половин тора. Для электромагнитных волн этот эффект несуществен, а для бернштейновских довольно важен, поскольку заметное увеличение n_{\parallel}

вдоль траектории существенным образом смещает область их поглощения от циклотронного резонанса.

В отличие от траекторий затухание волн очень сильно зависит от параметров установки и температуры плазмы. Так, для условий Т-15 рассматриваемые волны ($\delta=48^\circ$) поглотились бы, не доходя до области ЭЦР.

Отметим, что картина распространения необыкновенных волн в области трансформации весьма причудлива, а бернштейнские волны при $n_{\parallel} \neq 0$ распространяются под небольшим углом к магнитному полю (рис. 14).

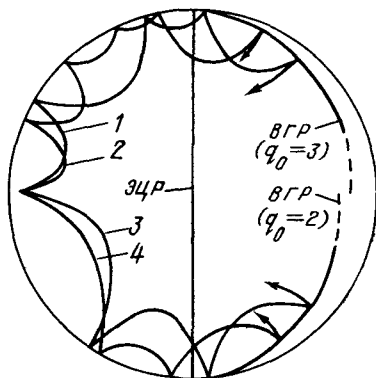
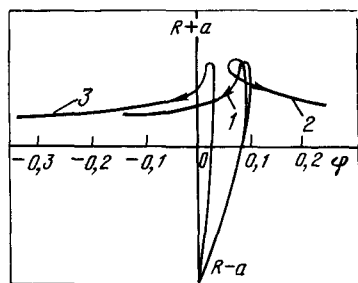


Рис. 14. Проекция лучевых траекторий на экваториальное сечение тора при $q_0=0,6$:

1 — $\alpha=-6^\circ$, $\delta=48^\circ$; 2 — $\alpha=6^\circ$, $\delta=48^\circ$; 3 — $\alpha=-3^\circ$, $\delta=83^\circ$. Жирной линией выделены участки траекторий, где поглощается более 99% мощности бернштейнских волн

Рис. 15. То же, что и на рис. 13, а, при большей концентрации плазмы с учетом отражения волн от стенок камеры:

1 — $q_0=3$, $\alpha=21^\circ$, $\delta=48^\circ$; 2 — $q_0=3$, $\alpha=30^\circ$, $\delta=48^\circ$; 3 — $q_0=2$, $\alpha=-21^\circ$, $\delta=48^\circ$; 4 — $q_0=2$, $\alpha=35^\circ$, $\delta=-35^\circ$

Кардинальным образом меняется характер распространения волн при переходе к плотной плазме $q_0 > 2$ (рис. 15). В этом случае существенную роль играет отражение волн от стенок камеры. При расчетах предполагалось, что при отражении от стенки сохраняется величина n_{\parallel} и случайным образом меняется величина n_{\perp} , поскольку мелко гофрированная стенка, по-видимому, приводит к диффузному отражению волн в направлении большого обхода тора. Поляризация волн считалась также случайно изменяющейся при отражении.

Картина распространения обыкновенной волны со стороны слабого поля заметно проще (рис. 16). Важно отметить, что в условиях крупных токамаков (например, Т-10 и больше) релятивистское поглощение обыкновенной волны, соответствующее $n_{\parallel} = 0$, оказывается достаточным для полного поглощения ее энергии за один проход через резонансный слой [2]. При этом обыкновенная волна при достижении резонанса в первую очередь поглощается электронами с малой энергией [40]. Таким образом, использова-

ние обыкновенной волны оказывается очень удобным с точки зрения нагрева плазмы. Однако запуск необыкновенной волны с внутренней стороны тора позволяет вкладывать энергию в центральную часть плазменного шнура при относительно больших (примерно вдвое) концентрациях плазмы [35].

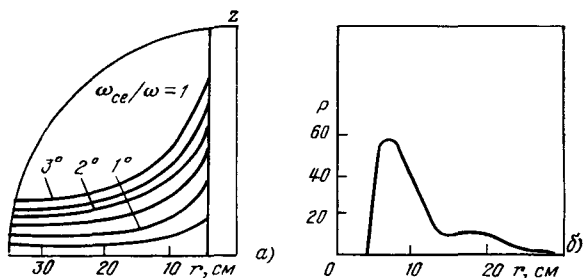


Рис. 16. Проекция лучевых траекторий на поперечное сечение плазменного шнура при запуске обыкновенных волн с внешней стороны тора: $q_0=1$, $\delta=0$, $T_{e0}=1$ кэВ (а) и распределение плотности поглощенной СВЧ-мощности (в относительных единицах) (б)

§ 11. Роль квазилинейных эффектов при электронном циклотронном нагреве

Вся излагавшаяся до сих пор теория являлась линейной, т. е. в ней не учитывалось воздействие поглощаемой СВЧ-мощности на свойства среды. Между тем ясно, что взаимодействие электронов с интенсивным электромагнитным излучением может существенно изменить их функцию распределения, а тем самым и декременты затухания волн. Для описания этих изменений можно попытаться использовать стандартный подход квазилинейной теории [41—43], несмотря на то, что основная предпосылка этой теории — предположение о случайном (шумоподобном) характере электромагнитного поля — в экспериментах по нагреву, где частота волны задана генератором, строго говоря, не выполняется. Обоснованием применимости квазилинейного приближения может служить то обстоятельство, что обычно используемые антенны излучают целый спектр волн, различающихся величиной k_{\parallel} , благодаря чему пространственное распределение полей становится весьма сложным. Дополнительные сдвиги фазы вращения частицы относительно электромагнитного поля вызываются пространственной неоднородностью магнитного поля. Можно высказать гипотезу, что оба указанных обстоятельства можно учесть физически адекватным образом, считая среду пространственно однородной, а поле — случайной функцией координат, которую удобно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} \mathbf{E}_{k_{\parallel}} \exp[ik_{\perp} \cdot \mathbf{x} + ik_{\parallel} z - i\omega t] + \text{к. с.},$$

где фазы амплитуд $E_{k\parallel}$ считаются случайными. Разделяя далее в духе квазилинейной теории функцию распределения на медленно меняющуюся часть $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и осциллирующую часть f , удовлетворяющую линеаризованному кинетическому уравнению, можно представить скорость изменения F из-за взаимодействия с волнами, $(\partial F/\partial t)_w$, в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_w = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \overleftrightarrow{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F, \quad (62)$$

где тензор диффузии \overleftrightarrow{D} зависит от компонент v_{\perp} и v_{\parallel} скорости части. Явное выражение \overleftrightarrow{D} для случая взаимодействия электронов с электромагнитными волнами получено в работах [44—46], а с учетом релятивистских поправок в [47]. Анализ показывает, что при электронном циклотронном резонансе основную роль в (62) играет диффузия по v_{\perp} *. Соответствующий коэффициент диффузии имеет вид:

$$D_{\perp} = \frac{\pi e^2}{2m^2} \int dk_{\parallel} \left| \overleftrightarrow{\Pi}_s \mathbf{E} \right|^2 \delta(\omega - s\omega_B - k_{\parallel} v_{\parallel}),$$

где

$$\Pi_{sx} = \frac{sJ_s(\rho)}{\rho}; \quad \Pi_{sy} = iJ'_s(\rho);$$

$$\Pi_{sz} = \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_s(\rho); \quad \rho = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}, \quad s = 1, 2.$$

Если предположить, что при $s=1$ основной вклад в диффузию дает резонансная компонента электрического поля и что спектр волн представляет собой узкий пакет шириной Δk вокруг центрального значения $k_{\parallel} 0$, то при $\rho \ll 1$ D_{\perp} сводится к выражению

$$D_{\perp} = \frac{\pi e^2 |\overline{E}_{\perp}|^2}{m^2 v_{\perp} \Delta k}. \quad (63)$$

Здесь $|\overline{E}_{\perp}|^2$ — средний квадрат напряженности поля, определяемый соотношением

$$|\overline{E}_{\perp}|^2 = \int |E_{k\parallel}|^2 dk_{\parallel} \approx |\overline{E}_{k\parallel}|^2 \Delta k,$$

* Этот вывод очевиден для случая взаимодействия с необыкновенной волной. При перпендикулярном распространении обыкновенной волны, когда \mathbf{E} направлено по z на частицы со стороны электрического поля волны действует сила $F_z = eE \exp \left\{ i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \sin \omega_B t - i\omega t \right\}$; при $\omega = \omega_B$ она содержит резонансное (не зависящее от времени) слагаемое $F_{\text{res}} \approx eE k_{\perp} v_{\perp} / \omega$ [11]. Легко видеть, что оно полностью компенсируется z -й проекцией силы Лоренца $\frac{e}{c} [\mathbf{v} \overline{\mathbf{B}}]$ ($\overline{\mathbf{B}}$ — магнитное поле волны). В результате остается только перпендикулярная составляющая этой силы, изменяющая v_{\perp} .

Δk — ширина спектра волн, излучаемых антенной. Формулу (63) с точностью до коэффициента порядка единицы можно получить на основании следующих наглядных соображений, поясняющих физический смысл сделанных предположений. Допустим, что поле волны имеет вид $E_1(z) \exp[ik_{\perp} x + ik_{\parallel} z - i\omega t]$, где $E_1(z)$ — медленно меняющаяся случайная функция. Время τ когерентного взаимодействия электрона с волной определяется тогда соотношением $\tau \sim l_c/v_{\parallel}$, где l_c — длина корреляции амплитуды. Для коэффициента диффузии резонансных частиц при этом имеем:

$$D_{\perp} \sim \left(\frac{e}{m} E_1 \tau \right)^2 / \tau.$$

Поскольку $l_c \sim 1/\Delta k$, отсюда получается (63). Полное кинетическое уравнение для функции распределения электронов должно учитывать также электрон-электронные и электрон-ионные столкновения:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} (v_{\perp} D_{\perp}) \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\text{coll}}. \quad (64)$$

Столкновительный член обычно берется в форме, предложенной Ландау [48], или в каком-либо эквивалентном виде. Уравнение (64) позволяет легко оценить роль квазилинейной диффузии. Умножая (62) на $mv^2/2$ и интегрируя по скоростям, находим мощность, поглощаемую единицей объема плазмы $P_0 = 2n_{\text{res}} m D_{\perp}$ (где n_{res} — концентрация резонансных частиц), и полную поглощаемую мощность $P = P_0 V_{\text{heat}}$, где V_{heat} — объем слоя магнитных поверхностей, пересекающих область поглощения волн. Если предположить, что ВЧ-нагрев является основным, то в стационарном состоянии

$P \sim NT/\tau_E$, где τ_E — энергетическое время жизни и $D_{\perp} \sim \frac{N}{N_{\text{res}}} \frac{v_{\tau}^2}{\tau_E}$ (N_{res} — число частиц, участвующих в поглощении, N — полное число электронов плазмы). Для отношения столкновительного члена в (64) к квазилинейному теперь получается

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\text{coll}} / \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_w \approx \frac{N_{\text{res}}}{N} v(v_{\text{res}}) \tau_E,$$

где $v(v_{\text{res}}) \sim v_{ee}(v_{\text{res}}) \sim v_{ei}(v_{\text{res}})$ — частота кулоновских столкновений при характерной скорости v_{res} резонансных электронов. Поскольку $v(v_{\tau}) \tau_E \gg 1$, то квазилинейное искажение функции распределения будет незначительным, если доля объема, в которой непосредственно распределяется поглощенная мощность не слишком мала и поглощение осуществляется не слишком быстрыми частицами. Ситуация может сильно измениться, если v_{res} в несколько раз превосходит тепловую скорость. Этот случай специально изучался в работе [49] для необыкновенной волны. Оказалось, что даже при сильных искажениях функции распределения декремент затухания волн мало отличается от своего линейного значения. Авторы приходят к выводу, что при расчете лучевых траекторий

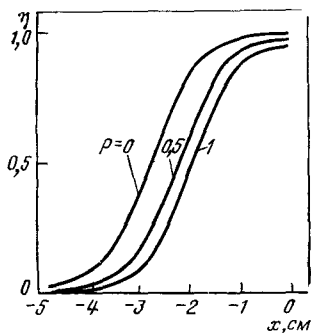


Рис. 17. Пространственное затухание обыкновенной волны при различных уровнях вводимой мощности P (МВт). Точка $x=0$ соответствует резонансу. При расчете предполагалось $n_{e0} = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 2 \text{ кэВ}$, $B = 30 \text{ кГс}$, $R_0 = 130 \text{ см}$, $a = 40 \text{ см}$

практически всегда для затухания можно пользоваться формулами линейной теории.

Случай обыкновенной волны при квази perpendicularном распространении рассмотрен в [47]. На рис. 17 показан взятый из этой работы пример, иллю-

стрирующий зависимость затухания от уровня вводимой мощности для волны, попадающей со стороны сильного магнитного поля (фактически считалось $\omega < \omega_B$). Наблюдающиеся изменения пространственного распределения поглощаемой энергии не очень значительны и не могут существенным образом повлиять на картину, полученную из линейного рассмотрения. При падении волны со стороны слабого поля зависимость от мощности вообще пренебрежимо мала. Такая разница связана с асимметрией релятивистского доплер-эффекта [см. (17)]. При $\omega > \omega_B$ и $n_{\parallel} \ll 1$ резонанс возможен только для медленных частиц, поэтому энергия поглощается основной частью электронов и функция распределения изменяется мало. При $\omega < \omega_B$ такое ограничение отсутствует, и при высоких температурах волна поглощается уже вдали от резонанса небольшой группой быстрых частиц. Естественно, что при таких условиях квазилинейное искажение функции распределения более заметно. Общий вывод, который можно сделать из имеющихся в литературе численных примеров и выполненных раньше оценок [31], состоит в том, что при мощностях, необходимых для ВЧ-нагрева плазмы в крупных токамаках, квазилинейное насыщение поглощения не возникает и в расчетах можно использовать линейную теорию.

Квазилинейные эффекты играют определяющую роль в другой проблеме, вызывающей в настоящее время очень большой интерес, — задаче о возбуждении в токамаке стационарного тока с помощью электромагнитных волн, в частности и в диапазоне частот электронного циклотронного резонанса [49—51]. Эта проблема, однако, выходит за рамки настоящего обзора, и мы не будем ее здесь касаться.

Авторы благодарны А. Н. Савельеву, выполнившему численные расчеты для построения некоторых графиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golant V. E. High Frequency Heating in Toroidal Plasmas. — In: Proc. of the Joint Varenna—Grenoble Intern. Symp. on Heating in Toroidal Plasmas, 1978, vol. 2, p. 149.

2. Аликаев В. В. ВЧ- и СВЧ-методы нагрева плазмы. — Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы, 1981, т. 1, ч. 2, с. 80.
3. Stepanov K. N. e. a. Mode Conversion and Wave Damping in the Low Frequency Range. — In: Proc. 2nd Joint Varenna—Grenoble Intern. Symp., Como, 1980, vol. 1, p. 519.
4. Голант В. Е., Пилия А. Д. Линейная трансформация и поглощение волн в плазме. — Успехи физ. наук, 1971, т. 104, вып. 3, с. 413.
5. Литвак А. Г., Пермитин Г. В., Суворов Е. В., Фрайман А. А. — Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, № 18, с. 858.
6. Аликаев В. В., Днестровский Ю. Н., Параил В. В., Переверзев Б. В. Препринт ИАЭ-2610. М., ИАЭ им. И. В. Курчатова, 1976.
7. Шафранов В. Д. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 3.
8. Ахизер А. И., Ахизер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
9. Тимофеев А. В., Чулков Г. Н. — Физика плазмы, 1979, т. 5, № 6, с. 1271.
10. Shkarofsky I. P. — Phys. Fluids, 1966, vol. 9, p. 561, p. 570.
11. Суворов Е. В., Фрайман А. А. — Изв. вузов, Радиофизика, 1977, т. 20, с. 67.
12. Tanaka M., Fujiwara M., Ikegami M. Nagoya University Research Report IPPJ-427, 1979.
13. Weitzner H., Betchelor O. B. — Phys. Fluids, 1980, vol. 23, N 7, p. 1359.
14. Тимофеев А. В. — Успехи физ. наук, 1973, т. 110, с. 329.
15. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
16. Preinhaelter J., Korecky V. — J. Plasma Phys., 1973, vol. 10, pt I.
17. Preinhaelter J. — Czechosl. J. of Phys., 1975, vol. B25, p. 39.
18. Mackawa T., Tanaka S., Terumichi Y., Hamada Y. Nagoya University Research Report IPPJ-313, 1977.
19. Antönsen T., Manheimer W. M. — Phys. Fluids, 1978, vol. 21(12), p. 2295.
20. Звонков А. В., Тимофеев А. В. — Физика плазмы, 1980, т. 6, № 6, с. 1219.
21. Федоров В. И. — Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, № 21, с. 1307.
22. Vaganov Yu. F., Fedorov V. I. — In: Proc. 10th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, 1981, vol. 1, paper H-13.
23. Пилия А. Д., Федоров В. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1969, т. 57, с. 1198.
24. Bernstein I. B. — Phys. Fluids, 1975, vol. 18, N 3, p. 320.
25. Weinberg S. — Phys. Rev., 1962, vol. 126, p. 1399.
26. De Luca F., Maroli C., Petrillo V. — Nuovo cimento, 1979, vol. 53B, N 2, p. 181.
27. Nekrasov A. K., Timofeev A. V. — Nucl. Fusion, 1970, vol. 10, p. 377.
28. Тимофеев А. В. — Успехи физ. наук, 1973, т. 110, № 3, с. 329.
29. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. — Там же, 1973, т. 109, № 2, с. 225.
30. Аликаев В. В., Днестровский Ю. Н., Параил В. В., Переверзев Г. В. — Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 230.
31. Litvak A. G., Permittin G. V., Suvorov E. V., Frayman A. A. — Nucl. Fusion, 1977, vol. 17, p. 659.
32. Fidone I., Granata G., Ramponi G., Meyer R. L. — Phys. Fluids, 1978, vol. 21, p. 645.
33. Ott E., Hui B., Chu K. R. — Ibid., 1980, vol. 23, p. 23, p. 1031.
34. Eldridge O., Namkung W., England O. C. Oak-Ridge Nat. Lab. USA. Report ORNL/TM-6052, 1977.
35. De Luca F., Maroli C., Petrillo V. — Nuovo cimento, 1979, vol. 53B, N 2, p. 195.
36. Баранов Ю. Ф., Федоров В. И. — Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, № 10, с. 608.
37. Баранов Ю. Ф., Федоров В. И. — Физика плазмы, 1983, т. 9, № 4, с. 677.

38. **Waffe S. M., Cohn D. R., Temkin R. J., Kreisoher K.** — Nucl. Fusion, 1979, vol. 19, p. 389.
39. **Maskawa T., Tanaka S., Terumichi Y., Hamada Y.** — J. Phys. Soc. Japan, 1980, vol. 48, N 1, p. 247.
40. **Baumgartel K.** — Nucl. Fusion, 1979, vol. 19, N 11, p. 1543.
41. **Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.** — Ядерный синтез, 1961, т. 1, с. 82.
42. **Drummond W. E., Pines D.** — Nucl. Fusion Suppl., 1962, pt 3, p. 1049.
43. **Веденов А. А.** — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, с. 203.
44. **Якименко В. Л.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1963, т. 44, с. 1534.
45. **Рецландс Дж., Сизоненко В. Л., Степанов К. Н.** — Там же, 1966, т. 50, с. 994.
46. **Kennel C. F., Engelman F.** — Phys. Fluids, 1966, vol. 9, p. 2371.
47. **Fidone I., Granata G., Meyer R. L.** Fontenay-aux-Roses Preprint EUR-CEA-FC-1053, 1980.
48. **Ландау Л. Д.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1937, т. 7, с. 203.
49. **Karney C. F. F., Fish N. J.** — Nucl. Fusion, 1981, vol. 21, p. 1549.
50. **Gordey J. G., Edlington T., Star D.** Culham Lab. Preprint CML-P636 1981.
51. **Параил В. В., Переверзев Г. В.** — Физика плазмы, 1982, т. 8, с. 45.

Динамика частиц в магнитных ловушках. Б. В. Чириков	3
§ 1. Введение Задача Будкера [1]	3
§ 2. Выбор невозмущенной системы	5
§ 3. Несколько примеров	6
§ 4. Адиабатическое возмущение	14
§ 5. Несущественный эффект возмущения	16
§ 6. Нелинейные резонансы	17
§ 7. Резонансное $\Delta\mu$	19
§ 8. Отображение	30
§ 9. Стандартное отображение	33
§ 10. Граница глобальной устойчивости	34
§ 11. Локальная диффузия	41
§ 12. Динамические корреляции	48
§ 13. Глобальная диффузия	52
§ 14. Отображение Козна	60
§ 15. Замечания об адиабатической инвариантности	67
Список литературы	70
ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ. Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков	74
§ 1. Введение	74
§ 2. Равновесие плазмы	79
§ 3. Дрейфовое движение заряженных частиц в открытых ловушках	93
§ 4. Неоклассический перенос в открытых ловушках	115
§ 5. Резонансный и стохастический перенос в открытых ловушках	136
Приложения	151
Список литературы	158
КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ АДИАБАТИЧЕСКИХ ЛОВУШКАХ В. П. Пастухов	160
Введение	160
§ 1. Основные принципы удержания плазмы в простых пробочных ловушках	162
§ 2. Удержание электронов в простых пробочных ловушках	169
§ 3. Удержание ионов в простых пробочных ловушках	180
§ 4. Ловушки с улучшенным продольным удержанием плазмы	193
Заключение	202
Список литературы	203
УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ПЛАЗМЕ. В. И. Коган, В. С. Лисица, Г. В. Шолин	205
Введение	205
§ 1. Общие формулы для распределения интенсивности в линии	206
§ 2. Плазменное микрополе	210
	305

§ 3. Механизмы уширения линий в плазме. Характер взаимодействия атома с плазменным микрополем	220
§ 4. Статическая теория и ее обобщения	234
§ 5. Ударная теория уширения частицами и волнами	246
§ 6. Переход от ударного механизма уширения к статическому	253
§ 7. Сравнение теории с экспериментом	256
Заключение	256
Список литературы	259
ЭЛЕКТРОННЫЙ ЦИКЛОТРОННЫЙ НАГРЕВ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКАХ. <i>А. Д. Пилюя, В. И. Федоров</i>	262
Введение	262
§ 1. Электромагнитные волны в области частот электронного циклотронного резонанса	263
§ 2. Электронный циклотронный резонанс в однородной плазме при учете теплового движения электронов	266
§ 3. Вектор Пойтинга и поглощение энергии при циклотронном резонансе	271
§ 4. Доступность резонансов в токамаке	278
§ 5. Циклотронное затухание волн в модели одномерной неоднородности	282
§ 6. Отражение волн от резонансной зоны	285
§ 7. Линейная трансформация волн в окрестности верхнего гибридного резонанса	287
§ 8. Уравнение эйконала в окрестности циклотронного резонанса и лучевые траектории волн	288
§ 9. О применимости геометрической оптики в окрестности циклотронного резонанса	293
§ 10. Лучевые траектории и поглощение волн в токамаках	296
§ 11. Роль квазилинейных эффектов при электронном циклотронном нагреве	299
Список литературы	302

УДК 533.9

Чириков Б. В. Динамика частиц в магнитных ловушках.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13/Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 3—73.

Дан обзор последних работ по проблеме длительного удержания заряженных частиц в открытых магнитных системах. Изложение основано на анализе нелинейных резонансов и их взаимодействия, которое приводит к различным видам стохастической неустойчивости движения частиц.

Ил. 10. Библиогр. 54.

УДК 533.9

Рютов Д. Д., Ступак Г. В. Процессы переноса в аксиально-несимметричных открытых ловушках.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13/Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 74—159.

Рассмотрены процессы переноса в коротких и длинных аксиально-несимметричных ловушках.

В коротких ловушках угол $\Delta\varphi$ прорейфовывания ведущего центра частицы вокруг магнитной оси ловушки мал по сравнению с единицей. В зависимости от частоты столкновений здесь выделяются вращательный и банановый режимы, режимы плато и сильных столкновений. Получены выражения для коэффициентов переноса в этих режимах. Описан способ уменьшения переноса с помощью специального выбора магнитного поля ловушки.

В длинных ловушках, характеризуемых тем, что в них $\Delta\varphi \geq 1$, реализуются резонансные банановый и режим плато. При $\Delta\varphi \gg 1$ возникает стохастический режим, где потери происходят даже в пренебрежении кулоновскими столкновениями.

Вычислению коэффициентов переноса предпослано рассмотрение особенностей равновесия плазмы в открытых ловушках.

Ил. 16. Библиогр. 52.

УДК 533.9

Пастухов В. П. Классические продольные потери плазмы в открытых адиабатических ловушках.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13/Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 160—204.

Рассмотрен классический механизм продольных потерь плазмы, характерный для широкого класса открытых магнитных ловушек, в которых удержание отдельных частиц основано на сохранении поперечного адиабатического инварианта (магнитного момента). Подробный анализ этого механизма, связанного с кулоновским рассеянием частиц, проведен на примере простой пробочной ловушки. Описаны основные методы расчета классических продольных потерь ионов и электронов. На основании результатов, полученных при рассмотрении простой пробочной ловушки, проведен анализ более сложных систем с улучшенным продольным удержанием плазмы, таких, как: амбиполярные ловушки, ловушки, с вращающейся плазмой, многопробочные ловушки.

Ил. 10. Библиогр. 46.

УДК 533.9

Коган В. И., Лисица В. С., Шолин Г. В. Уширение спектральных линий в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13/Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 205—261.

Дан обзор теории уширения атомных спектральных линий в плазме. Рассмотрены вопросы статистики микрополя, создаваемого в плазме индивидуальными частицами и коллективными колебаниями. Проанализирована динамика взаимодействия излучающего атома с плазменным микрополем и особенности контуров спектральных линий. Большое внимание уделено штарковскому уширению водородных линий как при столкновениях с заряженными частицами, так и при воздействии на атом коллективных низко- и высокочастотных коле-

баний. Основные выводы теории иллюстрируются экспериментальными данными.

Ил. 11. Библиогр. 80.

УДК 533.9

Пиля А. Д., Федоров В. И. Электронный циклотронный нагрев плазмы в токамаках. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13/Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 262—304.

Излагается линейная теория распространения и затухания электромагнитных волн с частотой, близкой к частоте электронного циклотронного резонанса в плазме с неоднородным магнитным полем и концентрацией. В модели слоисто-неоднородной среды вычислены коэффициенты поглощения волн в резонансном слое в зависимости от угла падения волны и ее поляризации. Рассмотрены релятивистские эффекты, существенные при перпендикулярном распространении волн. Обсуждаются условия применимости приближения геометрической оптики в среде с сильной пространственной дисперсией и возможности ее использования для расчета лучевых траекторий электромагнитных волн в токамаке. Описан процесс линейной трансформации электромагнитных волн в моду Бернштейна в области верхнего гибридного резонанса, существенный при неполном поглощении волн в циклотронном слое. Рассмотрены квазилинейные эффекты при электронном циклотронном нагреве и границы применимости линейного приближения. Обсуждаются возможности и перспективы электронного циклотронного нагрева плазмы в тороидальных установках для управляемого термоядерного синтеза.

Ил. 17. Библиогр. 51.

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Выпуск 13

Редактор *В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Переплет художника *Н. Я. Вовк*
Технический редактор *Л. Ф. Шкилевич*
Корректор *Н. А. Смирнова*
ИБ № 528

Сдано в набор 14.02.84. Подписано в печать 12.05.83. Т-06472. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л 19,5. Усл. кр.-отт. 19,5. Уч.-изд. л. 22,52. Тираж 765 экз. Цена 3 р. 40 к. Заказ 401.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114,
Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 6
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая, 24.

5-175



ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ